Technische Elektrizitätslehre – Grundlagen

Gleichstrom

Prof. Martin Schlup

 3. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe

1.1. Elektrischer Strom

Ein elektrischer Strom stellt sich ein, wenn eine Leiterschleife, die eine Quelle, wie z. B. eine Batterie enthält, geschlossen wird. Der Strom kann nicht direkt, sondern nur an seinen Wirkungen festgestellt werden. Als Wirkungen können folgende Phänomene aufgelistet werden, die in verschiedenen Zusammenstellungen auftreten können:

- Wärmeerzeugung (Entropiezuwachs): Erwärmung eines stromführenden Leiters (Draht, Halbleiter, Batterie)
- Entstehung eines magnetischen Felds: Beeinflussung einer Kompassnadel in der Nähe einer stromführenden Schiene oder eines Elektromagneten
- Entstehung von elektromagnetischen Wellen: Abstrahlung bei Antennen oder Licht bei LEDs
- Beeinflussung von chemischen und biologischen Reaktionen: Elektrolyse, Muskelspannung

Der Strom in der Leiterschleife hat eine eindeutige Richtung, die durch Umpolen der Quelle geändert werden kann. Dies kann z. B. am magnetischen Feld beobachtet werden. Zur Messung der Intensität eines Stromes, der sogenannten Stromstärke, werden Geräte benutzt die eine der Wirkungen des Stromes erfassen, meistens aber indirekt durch Messung einer Spannung an einem festen Widerstand.[1] Solche Geräte werden Strommessgeräte oder auch Ampèremeter genannt. Die Einheit der Stromstärke ist das Ampère (siehe Anhang A).

1.2. Ladung

Die elektrische Ladung ist immer an Materie, an sogenannte Ladungsträger, gebunden, d. h. sie kann als **Eigenschaft** der Materie betrachtet werden. Die elektrische Ladung ist also an Masse gebunden. Ladungsträger können Elementarpartikel, wie Elektronen oder Protonen, sowie Ionen d. h. ionisierte Atome oder Moleküle sein.

Elektrisch geladene Körper ziehen sich an oder stossen sich ab. Um dies modellmässig erklären zu können, wurde postuliert:

- Die Ladung hat ein Vorzeichen: Ladung kann positiv oder negativ sein.
- Ladungsträger mit vorzeichenmässig gleicher Ladung stossen sich ab, solche mit vorzeichenmässig verschiedener Ladung ziehen sich an.

[1] Diese Begriffe werden später in Text erläutert.

Ladungstrennung

Entnimmt man einem ungeladenen Körper Ladungsträger mit negativer Ladung, z. B. Elektronen, bleibt ein positiv geladener Körper zurück. Dies führt zu folgenden Feststellungen:

- Ein ungeladener Körper enthält gleichviel positive wie negative Ladung (Symmetrie).
- Positive und negative Ladung heben sich gegenseitig auf.

Ladungserhaltung

Als empirische Tatsache gilt:[2]

- Die elektrische Ladung bleibt erhalten. Sie kann also weder erzeugt noch vernichtet werden (analog zur Energie). Sie bleibt auch im Gegensatz zur Masse bei Geschwindigkeiten in der Grössenordnung der Lichtgeschwindigkeit konstant: Die elektrische Ladung ist nach der Relativitätstheorie Einsteins invariant.
- Die Ladungserhaltung ist lokal: Um in einem beliebigen Raumgebiet die elektrische Ladung zu verändern, ist ein Ladungstransport durch die Gebietsgrenze notwendig.

Elementarladung

Bis heute wurden keine kleineren Ladungseinheiten als die Elementarladung e beobachtet.[3] Diese wurde durch das BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) auf folgenden exakten Wert festgesetzt (siehe Anhang A):

$$\mathrm{e} = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \quad \text{(exakter Wert)} \tag{1.1}$$

Alle Ladungen sind ganzzahlige Vielfache von e.

Tabelle 1.1.: Beispiele für elementare, atomare und molekulare Ladungsträger

Ladungsträger	Ladung
Elektron	$-\mathrm{e}$
Proton	$+\mathrm{e}$
Positron (Antielektron)	$+\mathrm{e}$
Antiproton	$-\mathrm{e}$
Kation (positiv geladenes Ion): Na^{+}	$+\mathrm{e}$
Anion (negativ geladenes Ion): SO_4^{2-}	$-2\mathrm{e}$

1.3. Leiter und Nichtleiter

Wird ein Stromkreis aus verschiedenen Materialien gebildet, so ist die Stärke der Wirkung des Stromes verschieden, auch wenn die selbe Quelle verwendet wird. Das elektrische Leitungsverhalten von diversen Materialien kann in drei Kategorien eingeteilt werden:

[2] *empirisch*: auf Erfahrung beruhend

[3] Im Gegensatz zu den mathematischen Variablen werden universelle Konstanten nicht mit kursiven Symbolen dargestellt.

Leiter

Stoffe bei denen starke Wirkungen entstehen, diese enthalten freie Ladungsträger in grosser Konzentration

Metalle: freie Elektronen bis zu $10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$ (für Kupfer z. B.)

elektrolytische Lösungen: Anionen (negative Ionen) und Kationen (positive Ionen)

Halbleiter

Stoffe, wie z. B. die Elemente Kohlenstoff (C), Silizium (Si), Germanium (Ge) oder Verbindungen wie Galiumarsenid (GaAs), Indiumantimonid (InSb), Zinkoxid (ZnO) die bei Raumtemperatur Wirkungen zeigen die um Grössenordnungen kleiner sind als bei Leitern, bei höheren Temperaturen jedoch, denen von Leitern nahe kommen können

frei bewegliche Ladungsträger: Elektronen und Löcher mit stark temperaturabhängigen Konzentrationen zwischen 10^{10} und $10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$

Nichtleiter und Isolatoren

Stoffe, wie z. B. diverse Gase (O_2, N_2, CO_2, He, Ne, SF_6), Keramik, diverse Kunststoffe, reines Wasser, (trockenes) Holz bei denen keine oder nur sehr schwache Wirkungen beobachtet werden können

1.4. Stromstärke

Die Wirkung eines elektrischen Stroms, und damit auch sein Vorhandensein, wird immer dann festgestellt, wenn Ladung bewegt wird, bzw. sich Ladungsträger bewegen. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Beobachter gegenüber der Ladung, oder die Ladung sich gegenüber dem Beobachter bewegt. Es kommt auf die *relative* Bewegung an:

> Zwei Beobachter die sich gegeneinander (mit ihren Messinstrumenten) bewegen, werden für dieselben Ladungsträger, verschiedene Stromstärken feststellen (messen). Zum Beispiel: Elektronen bewegen sich im Vakuum auf einer Flugbahn mit konstanter Geschwindigkeit. Ein ruhender Beobachter, stellt einen konstanten Strom fest und somit ein magnetisches Feld. Er stellt auch ein elektrisches Feld fest, da die bewegte Ladungswolke elektrisch nicht neutral ist. Ein zweiter Beobachter der sich mit den Ladungsträgern bewegt stellt keinen Strom fest, somit auch kein Magnetfeld, sondern nur ein elektrostatisches Feld. Dieser scheinbare Widerspruch, wonach das selbe Phänomen anders wahrgenommen wird, ist eins der Merkmale der Relativitätstheorie und löst sich in der Maxwell'schen elektromagnetischen Theorie auf.

Technische Stromrichtung

Anhand der Wirkungen des Stroms kann nicht auf die Art der Ladungsträger geschlossen werden, die am Ladungstransport beteiligt sind: Ob der Strom z. B. aus negativ geladenen Ladungsträgern besteht, die sich in eine Richtung bewegen, oder aus positiv geladenen Ladungsträgern, die sich in die Gegenrichtung bewegen. Aus diesem Grund wurde die positive Stromrichtung willkürlich wie folgt definiert:

Die **technische** oder **konventionelle Stromrichtung** entspricht der Bewegungsrichtung der (positiven) Ladung.

Sie deckt sich also mit der Richtung von positiv geladenen Ladungsträgern, bzw. sie ist der Richtung von negativ geladenen Ladungsträgern entgegengesetzt. In Metallen fliessen daher die Elektronen entgegen der technischen Stromrichtung.

Stromstärke

Die Menge der Ladung die pro Zeiteinheit durch eine orientierte Kontrollfläche (Querschnittfläche) eines Leiters fliesst, heisst **Stromstärke** in diesem Leiter. Die Kontrollfläche durch den Leiter kann willkürlich gelegt und orientiert (ausgerichtet) werden. Diese Ausrichtung deckt sich mit der sogenannten **Bezugsrichtung** der Stromstärke. Je nach Orientierung der Kontrollfläche wird die Ladungsbilanz auf der einen oder der anderen Seite der Fläche gemacht.

- Fliesst ein negativer Ladungsträger in Bezugsrichtung durch die Fläche, so nimmt die Ladung auf der gewählten Seite ab und die Stromstärke ist daher negativ.
- Wird die Bezugsrichtung umgedreht, so ändert sch das Vorzeichen der Stromstärke. Umdrehen der Bezugsrichtung bedeutet also, dass die Ladungsbilanz auf der anderen Seite der Kontrollfläche gemacht wirdt.

Wird innerhalb der Zeitspanne (Zeitintervall) $\Delta t = t_2 - t_1$ die Ladung ΔQ durch die Bezugsfläche verschoben, so ergibt sich für die entsprechende Stromstärke I:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Falls das Verhältnis $\Delta Q/\Delta t$ unabhängig von der Länge des Zeitintervalls und der Zeit ist, so ist die Stromstärke (zeitlich) konstant. Mann spricht dann von einem **Gleichstrom** (Englisch: DC, direct current). Schwankt aber das Verhältnis in der Zeit, so kann aus dem zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ durch die Bezugsfläche die sogenannte momentane Stromstärke $i(t)$ wie folgt als Grenzwertbetrachtung definiert werden:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Bemerkung: Die Stromstärke sagt nicht durch welche Ladungsträger sie zustande kommt und auch nicht wie die Strömung im Detail im Leiterinnern aussieht. Sie ist ein mittleres Mass des Ladungstransports durch den Leiterquerschnitt, so etwa wie im Fall eines Flusses, die Angabe $100\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ für die Wassermenge die pro Sekunde fliesst, keinen Aufschluss darüber gibt, wo im Flussbett die Strömung am stärksten oder am schwächsten ist.

1.5. Stromdichte

Die in einem Leiter am Leitungsprozess beteiligten elektrischen Ladungsträger bewegen sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes und führen so zu einer Ladungsverschiebung.[4]

[4] In der Materie können sich natürlich nur „freie Ladungsträger“ bewegen, wie in Metallen z. B. die Valenzelektronen. Gebundene Ladungsträger, wie fest im Atomgitter verankerte Atome, nehmen nicht am Lei-

Diese „Strömung“ kann durch die Menge der einzelnen von den elektrischen Ladungsträgern eingeschlagenen Bahnen (Trajektorien) veranschaulicht werden. Als Richtung für die so gebildeten „Strömungslinien“ wird die Richtung der (positiven) Ladungsverschiebung gewählt. Die Strömung kann durch ein Vektorfeld – das Vektorfeld der Stromdichte – dargestellt werden: jedem Punkt des Leiters wird ein Vektor zugeordnet, der angibt in welche Richtung die Ladungsverschiebung stattfindet und welche Dichte sie dabei aufweist. Diese Stromdichtevektoren können wie folgt charakterisiert werden:

Eine (beliebige) Leiterquerschnittfläche wird dabei in kleine Flächenelemente ΔA_k unterteilt, wobei jedes einzelne Flächenelement senkrecht auf den Strömungslinien steht. Die Flächenelemente sollen dabei so klein sein, dass darüber die Strömung als homogen betrachtet werden kann. Durch diese Flächenelemente fliessen Teilströme der Stärke ΔI_k. Die Summe dieser Beiträge ergibt die Gesamtstromstärke I durch den Leiter. Für jede der Teilflächen lässt sich nun der Betrag der entsprechenden Stromdichte durch folgendes Verhältnis bestimmen:

$$j_k = \frac{\Delta I_k}{\Delta A_k}$$

Die Richtung der Stromdichte soll der konventionellen Stromrichtung entsprechen. Zur Beschreibung der Fläche kann der Flächennormalvektor $\Delta \mathbf{A}_k$ herangezogen werden, welcher senkrecht auf der Fläche steht und als Betrag das Flächenmass aufweist. Da die Fläche zwei Seiten aufweist, kann auch der Normalvektor auf zwei Arten gewählt werden. Diese Wahl ist aber willkürlich und entspricht der gewählten Bezugsrichtung der Stromstärke. In Umkehrung der Zusammenhänge kann unter Benutzung des Skalarproduktes die Stromstärke wie folgt bestimmt werden:

$$I = \sum_k \Delta I_k = \sum_k \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{A}_k$$

Bemerkungen:

- Für die Herleitung wurde angenommen, dass die Teilflächen senkrecht auf den Stromlinien stehen müssen. Dies ist natürlich unter Benutzung des Skalarprodukts nicht mehr zwingend, da so nur der Anteil der Strömung, welcher die Fläche durchdringt erfasst wird.

- Die Formel liefert das korrekte Vorzeichen für die Stromstärke unabhängig von der gewählten Strombezugsrichtung, bzw. Orientierung des Flächennormalvektors.

Beispiel: **Zusammenhang zwischen der Stromdichte und der Driftgeschwindigkeit**

Metallische Leiter besitzen eine Ladungsträgerdichte n (Anzahl freie Elektronen pro Volumeneinheit) die homogen ist und nicht von der Stromstärke abhängt. Jeder dieser Ladungsträger trägt die Ladung $q = -\mathrm{e}$. Fliesst ein Strom in einem linearen Leiter, so bewegen sich alle freien Elektronen mit der mittleren Geschwindigkeit v entlang der Stromlinien. Diese mittlere Geschwindigkeit wird **Driftgeschwindigkeit** genannt. Sie kann als Vektor $\mathbf{v}$ dargestellt werden, da sie einen Betrag und eine Richtung aufweist.

---

tungsprozess teil. Das elektrische Feld soll zunächst die lokale (am Ort wo sich die Ladung befindet) Ursache für die Ladungsbewegung sein. Das elektrische Feld führt auf eine mittlere Bewegung der Ladungsträger: die sogenannte Driftgeschwindigkeit. Neben dieser, führen die Ladungsträger noch wesentlich schnellere, zufällige thermische Bewegungen aus, die aber keine ausgeprägte Richtung aufweisen und somit nicht am Leitungsprozess teilnehmen.

Im Zeitintervall Δt verschieben sich die Ladungsträger im Leiter um die Strecke $\Delta\ell = v\,\Delta t$. Entsprechend verschiebt sich innerhalb dieser Zeit die Ladung

$$\Delta Q = n\,\Delta\ell\,A\,q = n\,v\,\Delta t\,A\,q$$

durch die Leiterquerschnittfläche A. Der Term $\Delta\ell\,A = v\,\Delta t\,A$ ist das innerhalb Δt verschobene Volumen der Ladungsträger. Wird die Bezugsrichtung der Stromstärke mit der konventionellen Stromrichtung gleichgesetzt, so erhält man für die resultierende Stromstärke so wie für die vektorielle Stromdichte:[5]

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n\,v\,\Delta t\,A\,q}{\Delta t} = (-\mathrm{e})\,n\,v\,A \\ \mathbf{j} &= -\mathrm{e}\,n\,\mathbf{v} \end{aligned}$$

Bei negativ geladenen Ladungträgern wie bei Metallen, sind die Vektoren **j** und **v** entgegengerichtet (antiparallel).

Verallgemeinert, falls positive und negative Ladungsträger am Strom beteiligt sind, wie z. B. bei Halbleitern oder Elektrolyten, ergibt sich:

$$\mathbf{j} = q_p\,n_p\,\mathbf{v}_p + q_n\,n_n\,\mathbf{v}_n$$

Der Index p steht für Ladungsträger mit positiver, n für solche mit negativer Ladung. Deren Dichten n_p und n_n und Driftgeschwindigkeiten v_p und v_n sind im Allgemeinen verschieden.

□

1.6. Energie, Potential und Spannung

Energie ist eine abstrakte Grösse die in sämtlichen physikalischen Prozessen vorkommt und mit der die Wechselwirkungen zwischen diesen Prozessen gewichtet oder „verrechnet“ werden können. Energie ist kein greifbarer Stoff, sondern ein Mass (Maß) das den „Wert“ eines Prozesses wiedergibt. Dabei kann ein Prozess Energie „kosten“, d. h. Energie binden oder im Gegensatz dazu, Energie „auszahlen“, d. h. Energie freisetzen. Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden (Energieerhaltungssatz). Energie braucht einen Träger mit dem sie transportiert wird. Im Fall der Elektrizität ist unter Anderem die Ladung (bzw. die Menge der Ladungsträger) ein Träger von Energie.

Empirisch wurde ausserdem festgestellt:

> Die Energie einer Ladung – Probeladung – in einem (Raum-) Punkt ist proportional zu dieser Ladung und hängt nur vom gewählten Punkt ab.

Erläuterungen

- Falls also in einem bestimmten Punkt die Ladung Q die Energie W besitzt, so würde in diesem Punkt die Ladung αQ die Energie αW und folglich die Ladung $-Q$ die Energie $-W$ besitzen.

[5] Die Beziehung für die Stromdichte kann vektoriell geschrieben werden, da **j** und **v** Vektoren sind.

- Dabei wird die Energie in einem Punkt bezüglich einem willkürlich gewählten Referenzpunkt mit dem ebenfalls willkürlich festgelegten Energiepegel „Null“ betrachtet. Ein Punkt mit negativer Energie bedeutet also für eine bestimmte Ladung, dass dort für die selbe Ladung weniger Energie zur Verfügung steht, als im Referenzpunkt.

- Eine Ladung Q besitze im Punkt P_1 die Energie W_1 und im Punkt P_2 die Energie W_2. Verschiebt man diese Ladung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2, wird dabei die Energie $\Delta W = W_2 - W_1$ umgesetzt.
  - Falls $W_1 > W_2$, bzw. bei $\Delta W < 0$, findet der Vorgang unter Freisetzung von Energie von selbst (spontan) statt. Die Ladung gibt dabei Energie frei.
  - Falls $W_1 > W_2$, bzw. bei $\Delta W > 0$, kann der Vorgang nur stattfinden unter Bindung von Energie an die Ladung. Energie muss dafür „von aussen“ geliefert werden, z. B. aus einer chemischen Reaktion oder einer erzwungenen Bewegung.

  Besitzt die Ladung Q im Punkt P_1 mehr Energie als im Punkt P_2, so wird sie spontan von P_1 zu P_2 gehen – sofern frei. Die Ladung $-Q$ hingegen, wird umgekehrt tendieren von P_2 nach P_1 zu gehen.

> Ladung fliesst spontan zu dem für sie tieferen Energieniveau. Der Energieüberschuss wird dabei freigesetzt. Der umgekehrte Vorgang kann nur unter Zulieferung und Bindung „externer“ Energie stattfinden.

Für jeden Punkt P des Raums kann das Verhältnis zwischen der Energie und der dazugehörenden Ladung gebildet werden. Wegen der Proportionalität zwischen Ladung und Energie, ergibt sich eine vom Vorzeichen und dem Betrag der Ladung unabhängige Grösse, das sogenannte **elektrostatische Potential**:

$$\varphi_\mathrm{p} = \frac{W_{1_\mathrm{p}}}{Q_1} = \frac{W_{2_\mathrm{p}}}{Q_2}$$

Das Potential eines Punktes des Raums ist ein Mass für die Energie, die die Einheitsladung in diesem Punkt bezüglich einem Referenzpunkt besitzen würde. Das Potential hängt nicht von der Ladung ab, sondern ist eine Eigenschaft des Raums allein.

Die Einheit des elektrischen Potentials ist: $[\varphi] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A\,s}} = \mathrm{V}$ (Volt)

Das Potential ist ein Skalarfeld, d. h. jedem Punkt des Raums wird eine Zahl zugewiesen: Das elektrostatische „Verhalten“ des Raums bezogen auf eine (fiktive) Einheitsladung kann durch die Angabe des Potentials (in jedem Punkt) beschrieben werden.

Mit dem Potential kann die Energieänderung bestimmt werden, die eine Ladung bei der Verschiebung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 erfährt:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = Q\,\varphi_2 - Q\,\varphi_1 = Q\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Aus Sicht eines „aussenstehenden Beobachters“ wird aber die Energie $-\Delta W$ umgesetzt:[6]

$$-\Delta W = W_1 - W_2 = Q\,\varphi_1 - Q\,\varphi_2 = Q\,(\varphi_1 - \varphi_2) = Q\,U_{12}$$

[6] Falls die Ladung Energie abgibt, steht sie für die Aussenwelt zur Verfügung und umgekehrt.

Die Potentialdifferenz U_{12} zwischen den Punkten P_1 und P_1 heisst **Spannung** *zwischen* diesen Punkten:

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2} \tag{1.2}$$

Somit gilt auch:

$$U_{21} = -U_{12}$$

Definitionsgemäss, wird die Spannung vom Punkt mit dem höheren zum Punkt mit dem niedrigeren Potential positiv gerechnet. Dies entspricht der Energiebilanz aus der Sicht des externen Beobachters.

1.7. Energiestrom und Leistung

Die Energie die durch Verschieben einer Ladung zwischen zwei Punkten umgesetzt wird, hängt nicht von der Geschwindigkeit ab mit der diese Verschiebung ausgeführt wird, sondern nur von der Spannung zwischen diesen Punkten. Als Mass für die Intensität mit der eine bestimmte Menge Energie zeitlich umgesetzt wird, kann der Energiestrom oder Leistung herangezogen werden. Wird also die Ladung ΔQ in der Zeitspanne Δt „über die Spannung“ U verschoben, so wird dabei die Energie $\Delta W = U\,\Delta Q$ umgesetzt. Erfolgt die Verschiebung gleichmässig (mit Gleichstrom), so ist auch die Leistung (zeitlich) konstant:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{U\,\Delta Q}{\Delta t} = U\,\frac{\Delta Q}{\Delta t} = U\,I$$

Die Leistung die also in einem elektrischen Prozess zwischen zwei Punkten eines elektrischen Kreises umgesetzt wird, lässt sich berechnen als Produkt der Spannung zwischen diesen Punkten mit der Stromstärke im Kreis.

Falls die Spannung und die Stromstärke sich zeitlich verändern, so ist auch die Leistung zeitabhängig. Für die momentane Leistung oder Momentanleistung $p(t)$ gilt dann:

$$p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t)\,\Delta q(t)}{\Delta t} = u(t)\,i(t)$$

2. Zweipole

Zweipole sind elektrische Bauteile, Elemente oder Schaltungen von denen nur zwei Anschlüsse oder Punkte betrachtet werden. Zwischen diesen Punkten sind die Spannung U, die Stromstärke I und der ausgetauschte Energiefluss mit der Umgebung die einzigen Grössen von Bedeutung. Stillschweigend wird angenommen, dass die Stromstärke, welche bei einem Anschluss hinein fliesst beim anderen simultan wieder heraustritt, d. h. es führt zu keinem Zeitpunkt zu einer Veränderung der Gesamtladung im Zweipol.

2.1. Passive Zweipole

Passive Zweipole weisen im Leerlauf keine Spannung und bei Kurzschluss keine Stromstärke an ihren Klemmen auf. Sie sich nicht in der Lage von sich aus Energie an einen anderen angehängten Zweipol abzugeben. Ihr Verhalten kann durch den Zusammenhang zwischen deren Klemmenspannung und der Klemmenstromstärke eindeutig beschrieben werden. Die graphische Darstellung dieses Zusammenhangs heisst **Charakteristik** oder **Kennlinie** des Zweipols. Dabei wird unterschieden, ob die Spannung in Funktion der Stromstärke – die U-I-Charakteristik – oder die Stromstärke in Funktion der Spannung – die I-U-Charakteristik – dargestellt wird. Beide Darstellungsarten sind möglich, wiedergeben aber keine Kausalität zwischen den Grössen in Sinne einer unabhängigen oder abhängigen Variable.

2.1.1. Widerstand und Leitwert

Das Verhältnis zwischen Spannung und Stromstärke wird elektrischer **Widerstand** (Englisch: *resistance*) genannt und mit dem Symbol R bezeichnet. Das reziproke Verhältnis ist der elektrische **Leitwert** (*conductance*) mit dem Symbol G. Widerstand und Leitwert sind physikalische *Eigenschaften* eines Zweipols. Es gilt natürlich $R = 1/G$ und umgekehrt.

Die Einheit des Widerstands entspricht dem Verhältnis der Einheiten von Spannung und Stromstärke, beim Leitwert entsprechend umgekehrt. Da diese Einheitenverhältnisse sehr häufig vorkommen, werden spezifische Bezeichnungen für diese Grössen benutzt:

$$\begin{aligned} \text{Einheit des Widerstands:} \quad & [R] = \text{V/A} = \Omega \quad \text{(Ohm)} \\ \text{Einheit des Leitwerts:} \quad & [G] = \text{A/V} = \Omega^{-1} = \text{S} \quad \text{(Siemens)} \end{aligned}$$

Die Abb. 2.1 zeigt die Schaltzeichen für lineare (ohmsche) und nichtlineare Widerstände nach DIN.[1]

[1] EN 60617 Reihe, siehe: http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Schaltzeichen_%28Elektrik/Elektronik%29

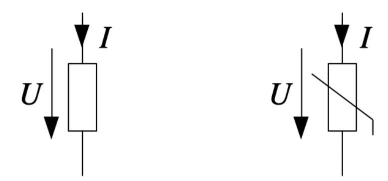


Abbildung 2.1.: Schaltsymbole für Widerstände mit eingetragenen Bezugsrichtungen für Spannung und Stromstärke (zu den Bezugsrichtungen siehe §2.3)
links: linearer Widerstand rechts: nichtlinearer Widerstand

2.1.2. Linearität und das Ohm'sche Gesetz

Der einfachste Fall liegt vor, wenn zwischen Spannung und Stromstärke *Proportionalität* herrscht. Diese Eigenschaft gilt für Metalle und Halbleiter bei *konstant gehaltener Temperatur*. Dieser Zusammenhang wurde von *G. F. Ohm* in 1826 entdeckt und wird entsprechend **Ohm'sches Gesetz** genannt:

> Bei gleichbleibender Temperatur ist die Spannung proportional zur Stromstärke, d. h. Widerstand und Leitwert sind unabhängig von Spannung und Stromstärke.

Bemerkungen:

- Die Linearität elektrischer Komponenten ist für die Anwendung eine mehr als nur praktische Eigenschaft. Daher werden elektrische Widerstände (Objekt) realisiert, deren Widerstandswerte (Eigenschaft) ohmsches Verhalten aufweisen sollen.[2] Technische Widerstände verhalten sich im Allgemeinen aber nur näherungsweise ideal: Bei längerer Belastung nimmt z. B. ihre Temperatur zu, was zu einer Abweichung der Linearitätseigenschaft führen kann.[3]

- Ohmsches Verhalten von Metallen oder Halbleitern ist überhaupt nicht selbstverständlich; der Leitungsprozess ist eigentlich ein sehr komplizierter Vorgang: Die freien Elektronen werden durch das elektrische Feld im Leiter beschleunigt aber durch „Kollisionen" untereinander und mit dem festen Atomgitter immer wieder abgebremst. Ein konstanter Widerstand bedeutet unter diesen Umständen, dass, um die Stromstärke zu verdoppeln, die elektrische Spannung – bzw. die Feldstärke – verdoppelt werden muss.[4]

In der Technik werden aber auch Objekte mit nichtlinearen Kennlinien benötigt, wie z. B, *spannungsabhängige Widerstände* (VDR: voltage dependent resistor), Dioden oder Thermistoren (temperaturabhängige Widerstände, NTC: negative temperature coefficient, PTC: positive temperature coefficient). Bei diesen Komponenten ist also der Widerstand keine konstante Grösse: er hängt von der Stromstärke und Spannung ab (siehe z. B. Abb. Abb. B.1).

[2] Die Benutzung des selben Ausdrucks für zwei verschiedene Bedeutungen führt in der Deutschen Sprache zu einem begrifflichen Verwischen zwischen dem Objekt und dessen Eigenschaft. Im Englischen wird das Objekt *resistor*, dessen Eigenschaft aber *resistance* genannt.
[3] Dies ist jedoch keine Verletzung der ohmschen Eigenschaft, welche nur bei konstanter Temperatur gilt.
[4] Bei einem Automobil z. B. kann mit einem doppelten Motorendrehmoment definitiv nicht eine doppelt so hohe Geschwindigkeit erreicht werden.

Bei den Thermistoren spielt ausserdem noch die Temperatur eine Rolle, so dass unterschieden werden muss zwischen schnellen Wechselvorgängen, bei denen die Temperatur gleich bleibt – dynamische Kennlinien – und trägeren Prozessen, wo die Temperatur z. B. durch Eigenerwärmung eine Rolle spielt – statische Kennlinien (siehe Abb. 2.2). Dabei gibt es nicht nur eine Charakteristik, sondern eine ganze Schar mit der Temperatur als Parameter.

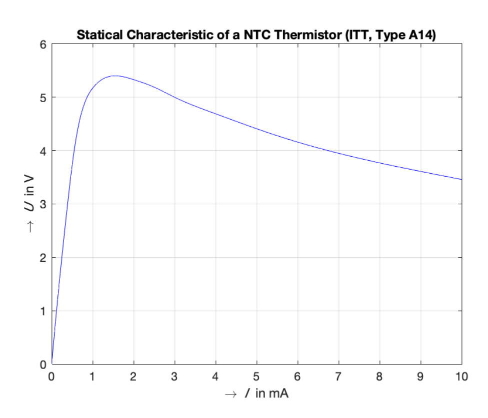


Abbildung 2.2.: Statische U-I-Kennline eines NTC Thermistors
Sämtliche Punkte der Kennlinie entsprechen einer Temperatur, welche sich nach einiger Zeit auf Grund der Eigenerwärmung infolge der Stromstärke einstellt. Bei konstant gehaltener Temperatur – extern aufgezwungen oder bei schneller Stromstärkeänderung – würde die dynamische Kennlinie des NTC einer Geraden durch den Ursprung entsprechen.

2.1.3. Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand

Der Widerstand eines Metalldrahtes z. B., hängt nicht nur von Material ab, sondern auch von der Geometrie des Leiters. Es zeigt sich, dass der Widerstand eines langen Leiters mit konstanter Querschnittfläche – eines *linearen Leiters* – proportional zu seiner Länge ℓ und sein Leitwert proportional zur Querschnittfläche A ist. Damit können für den Widerstand und den Leitwert folgende Formeln angegeben werden:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

$$G = \gamma \frac{A}{\ell}$$

Legende

ρ	(Rho)	spezifischer Widerstand in $\Omega\,\mathrm{m}$, wobei $10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m} = 1\,\Omega\,\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 10^{-4}\,\Omega\,\mathrm{cm}$
γ	(Gamma)	Leitfähigkeit in $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, wobei $10^6\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1} = 1\,\Omega^{-1}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2} = 10^4\,\Omega{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$

Bemerkungen:

- Die Formeln oben gelten nur für lineare Leiter: nur dann ist der Widerstand proportional zur Leiterlänge und invers proportional zum Leiterquerschnitt.
- Im angelsächsischen Sprachraum wird für die Leitfähigkeit (*conductivity*) das Symbol σ (Sigma) verwendet.

- Neben der Materialabhängigkeit hängt auch die Geometrie von der Temperatur ab (Wärmeausdehnung). Im den meisten Fällen überwiegt aber die Empfindlichkeit der Leitfähigkeit.

Temperaturabhängigkeit

Die Leitfähigkeit von Metallen und Halbleitern ist temperaturabhängig. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Leitfähigkeit bei Metallen im Allgemeinen ab und bei Halbleitern zu: Metalle zeigen *Kaltleiter*- und Halbleiter *Heissleiter*-Verhalten. Dies lässt sich vereinfacht durch folgende, in ihrer Wirkung entgegengesetzte Effekte erklären:

- Mit zunehmender Temperatur nehmen auch die Gitterbewegungen der Atome zu. Dabei nimmt die mittlere Zeitspanne – die so genannte Relaxationszeit – zwischen den „Kollisionen“ der Ladungsträger mit dem Atomgitter ab und somit auch deren Driftgeschwindigkeit. Dieser Effekt ist bei Metallen und Halbleitern vorhanden und sorgt für eine Abnahme der Leitfähigkeit.

- Mit zunehmender Temperatur werden mehr Ladungsträger für den Ladungstransport zur Verfügung gestellt, insbesondere bei Halbleitern durch Bildung von zusätzlichen Elektron-Löcher-Paaren. Damit erhöht sich die Ladungsträgerdichte. Dieser Effekt überwiegt bei Halbleitern, so dass ihre Leitfähigkeit typischerweise mit der Temperatur zunimmt.

Bei Metallen wird üblicherweise nicht die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit angegeben, sondern die des spezifischen Widerstands. Für einen beschränkten Temperaturbereich kann die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands wie folgt approximiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Lineare Approximation:} \quad & \rho_\theta = \rho_0\,(1 + \alpha_0\,\Delta\theta) \\ \text{Quadratische Approximation:} \quad & \rho_\theta = \rho_0\,(1 + \alpha_0\,\theta + \beta_0\,\Delta\theta^2) \end{aligned}$$

Legende

ρ_0	spez. Widerstand bei der Bezugstemperatur θ_0
ρ_θ	spez. Widerstand bei der Temperatur θ in °C
$\Delta\theta = \theta - \theta_0$	Temperaturänderung bezogen auf θ_0
α_0	Temperaturkoeffizient bezogen auf θ_0 in $°\mathrm{C}^{-1}$
β_0	quadratischer Temperaturkoeffizient in $°\mathrm{C}^{-2}$

Tabelle 2.1.: Leitfähigkeit verschiedener Metalle und deren Temperaturkoeffizienten
Temperaturbereich für alle Stoffe $-200 \cdots +600\,°\mathrm{C}$
ausser Wolfram mit $0 \ldots 2000\,°\mathrm{C}$ und Eisen mit $0 \ldots 100\,°\mathrm{C}$

	Ag	Cu	Au	Al	W	Fe	Konstantan 55% Cu, 44% Ni, 1% Mn
ρ_{20} in $\mu\Omega\,\mathrm{m}$	0.016	0.018	0.022	0.028	0.056	0.097	0.5
α_{20} in $10^{-3}\,°\mathrm{C}^{-1}$	3.80	3.92	4.00	3.77	4.42	6.00	±0.05
β_{20} in $10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-2}$	–	–	–	–	1.25	–	–

Für Elementarhalbleiter (Si, Ge) kann im Temperaturbereich zwischen 200 K und 500 K folgende Formel für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit angegeben werden:

$$\gamma(T) = C \exp\left(\frac{E_a}{k\,T}\right)$$

Legende

γ	Leitfähigkeit
E_a	Anregungsenergie (0.5 eV bis 1 eV $\approx 1 \cdot 10^{-19}$ J)
k	Bolzmann-Konstante $k = 1.380'649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
T	Temperatur in K (Kelvin)
C	Materialkonstante mit der Einheit der Leitfähigkeit

Supraleitung

Bei gewissen reinen Metallen (Al, Hg, Pb, Nb) und einigen Legierungen (NbN, NbAlGe) sinkt der spezifische Widerstand bei der sogenannten Sprungtemperatur auf einen unmessbar kleinen Wert ab. Reines Kupfer allerdings wird nicht supraleitend. Die Sprungtemperatur ist in der Regel nur wenig oberhalb des absoluten Temperaturnullpunkts. Kupferoxide (z. B. LaBaCuO) und Keramiken (z. B. YBaCuO) weisen höhere Sprungtemperaturen auf. Den Rekord für die bis jetzt höchste Sprungtemperatur hält zur Zeit ein Quecksilber-Barium-Calcium-Cuprat (*Schilling*, 1993) mit einem Wert von 133.5 K (Nullwiderstand unterhalb 95 K). Da der Schmelzpunkt von flüssigem Stickstoff (N_2) unterhalb 90 K liegt, wäre eine wirtschaftliche Kühlung des supraleitenden Materials möglich.

Eine breite technische Anwendung in den Gebieten Energieumwandlung, -transport und -speicherung, sowie Motor- und Generatorenbau ist im heutigen Stand der Technik noch nicht möglich, da der supraleitende Effekt beim Vorhandensein starker Stromdichten, bzw. starker Magnetfelder verschwindet. Darüber hinaus sind die Formgebung und die mechanische Verarbeitung der supraleitenden Materialien mit hohen Sprungtemperaturen wegen ihrer Sprödheit problematisch.

2.2. Aktive Zweipole

Aktive Zweipole können eine Spannung im Leerlauf oder eine Stromstärke bei Kurzschluss aufweisen, sind also zwischen diesen beiden Betriebsarten in der Lage von sich aus Energie zu liefern: ihre Kennlinie verläuft nicht durch den Koordinatenursprung.

Bemerkung: Die Unterscheidung aktiver/passiver Zweipol ist nicht zu verwechseln mit dem *Betriebszustand* welcher ein Zweipol annehmen kann: Ein passiver Zweipol kann nur *passiv wirken*, wogegen ein aktiver Zweipol *aktiv* oder *passiv wirken* kann, je nachdem ob er Energie abgibt oder aufnimmt.

2.2.1. Ideale Quellen

Ideale Spannungs- und Stromquellen sind Modelle für aktive Elemente mit Eigenschaften, die in Wirklichkeit nur näherungsweise realisiert werden können: z. B. sind ideale Quellen in der Lage beliebig hohe Stromstärken oder Spannungen und somit unbegrenzte Energiemengen abzugeben. Als **aktive Elemente** bezeichnet man Zweipole deren U-I-Kennlinie *nicht durch den Ursprung* verläuft, im Fall von idealen Quellen, z. B. parallel zu den Koordinatenachsen.

Ideale Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle liefert eine von der Klemmenstromstärke I unabhängige Klemmenspannung U:

$$U = U_\mathrm{q} \quad \text{für alle Werte von } I \tag{2.1}$$

Gleichung (2.1) gilt unabhängig vom Vorzeichen von I also auch für den Fall, wo die Quelle *passiv wirkt*, bzw. Energie aufnimmt.[5]

Die Abb. 2.3 zeigt das Schaltzeichen einer idealen Spannungsquelle nach DIN.[6] Das dabei benutzte Bezugspfeilsystem entspricht hier dem eines „Energielieferanten“, das *Quellenpfeilsystem* (siehe Anhang 2.3).[7]

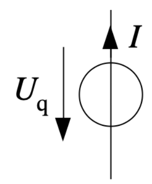


Abbildung 2.3.: Schaltzeichen einer idealen Spannungsquelle

Ideale Stromquelle

Eine ideale Stromquelle liefert eine von der Klemmenspannung U unabhängige Klemmenstromstärke I.

$$I = I_\mathrm{q} \quad \text{für alle Werte von } U \tag{2.2}$$

Gleichung (2.2) gilt unabhängig vom Vorzeichen von U also auch für den Fall, wo die Quelle passiv wirkt, bzw. Energie aufnimmt.

Die Abb. 2.4 zeigt das Schaltzeichen einer idealen Stromquelle nach DIN.

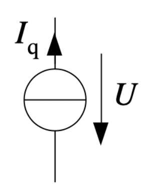


Abbildung 2.4.: Schaltzeichen einer idealen Stromquelle

2.2.2. Lineare Quellen

Im Gegensatz zu idealen Quellen, sinkt bei *realen* Quellen die Klemmenspannung mit zunehmender Quellenstromstärke. Unbelastet, also wenn kein Strom fliesst, erscheint an den Klemmen

[5] Praktisch können ideale Quellen mit elektronischen Mitteln realisiert werden (Stabilisierschaltung). Sie können aber im Allgemeinen nicht passiv betrieben werden, d. h. so, dass sie Energie aufnehmen.

[6] EN 60617 Reihe, siehe: http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Schaltzeichen_%28Elektrik/Elektronik%29

[7] Bei diesem Bezugspfeilsystem bedeutet $P = U_\mathrm{q} I > 0$, dass die Quelle Energie abgibt, andernfalls für $P < 0$ Energie aufnimmt.

die so genannte **Leerlaufspannung** U_0. Ist bei Belastung die Differenz zwischen der Leerlauf- und der Klemmenspannung proportional zur Klemmenstromstärke ($U_0 - U \propto I$), so spricht man von einer **linearen Quelle**. Die Kennlinie ist in diesem Fall eine Gerade mit negativer Steigung (siehe Abb. 2.5). Diese schneidet daher die Stromachse bei der so genannten **Kurzschlussstromstärke** I_0, wo die Klemmenspannung Null beträgt. Auch dieses Modell ist eine Idealisierung: real existierende Quellen verhalten sich nur beschränkt wie lineare Quellen, insbesondere können letztere im Allgemeinen nicht schadenfrei kurzgeschlossen und üblicherweise auch nicht passiv betrieben werden.

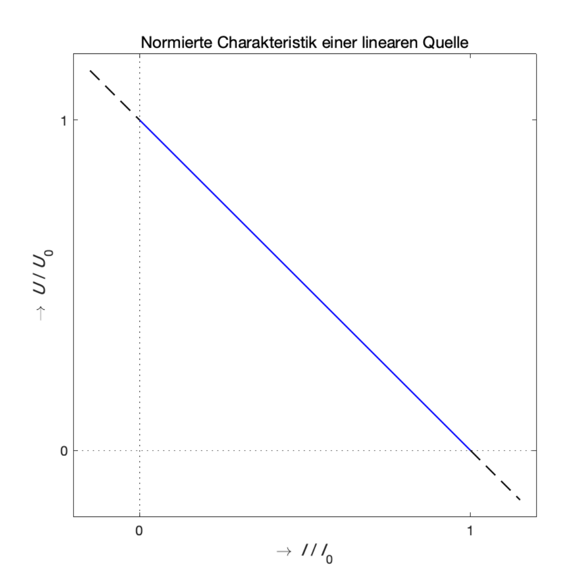


Abbildung 2.5.: Normierte U-I-Kennlinie einer linearen Quelle
Die "1" auf der x-Achse (Abszisse) entspricht der Kurzschlussstromstärke I_0, die auf der y-Achse (Ordinate) der Leerlaufspannung U_0 der Quelle. Die Kennlinie einer linearen Quelle erstreckt sich (unbegrenzt) über drei Quadranten: in ersten Quadrant wirkt die Quelle aktiv (gibt Energie ab), im 2. und 4. Quadrant wirkt sie passiv (nimmt Energie auf).

Die Kennlinie einer linearen Quelle ist also eine Gerade zwischen den Punkten ($U = U_0$, $I = 0$) und ($U = 0$, $I = I_0$):

$$U = U_0 - \frac{U_0}{I_0} I \qquad \text{oder aufgelöst nach } I\text{:} \tag{2.3}$$

$$I = I_0 - \frac{I_0}{U_0} U \tag{2.4}$$

> Leerlaufspannung und Kurzschlussstromstärke beschreiben das elektrische (Klemmenverhalten) einer linearen Quelle vollständig.

Theoretisch kann eine lineare Quelle auch passiv betrieben werden, d. h. im 2. oder 4. Quadranten (gestrichelter Teil der Kennlinie in der Abb. 2.5).

Lineare Spannungsquelle

Der an den Klemmen der belasteten linearen Quelle fehlende Spannungsanteil kann durch einen **Innenwiderstand** „erklärt“ werden. Das Verhalten einer linearen Quelle kann somit durch die Serieschaltung einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_\mathrm{q} = U_0$ und eines Innenwiderstandes mit dem Widerstandswert $R_i = U_0/I_0$ nachgebildet werden (siehe Abb. 2.6). An diesem Widerstand entsteht ein dem Quellenstrom proportionalen „Spannungsverlust“.

Die Gleichung der U-I-Kennlinie der linearen Spannungsquelle ergibt sich entsprechend der Gleichung (2.3):

$$U = U_\mathrm{q} - R_i\, I \tag{2.5}$$

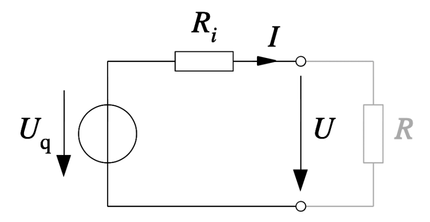


Abbildung 2.6.: Lineare Spannungsquelle mit idealer Spannungsquelle, Innenwiderstand und Lastwiderstand

Bemerkung: Für die lineare Quelle bilden die Bezugspfeilrichtungen für U und I ein „Quellenpfeilssytem“, für den Lastwiderstand hingegen, ein „Abnehmerpfeilsytem“ (siehe § 2.3).

Lineare Stromquelle

Der an den Klemmen der belasteten linearen Quelle fehlende Stromanteil kann ebenfalls durch einen **Innenwiderstand** „erklärt“ werden. Das Verhalten einer linearen Quelle kann somit durch die Parallelschaltung einer idealen Stromquelle mit der Quellenstromstärke $I_\mathrm{q} = I_0$ und eines Innenwiderstandes mit dem Leitwert $G_i = I_0/U_0$ nachgebildet werden (siehe Abb. 2.7). An diesem Widerstand entsteht ein der Klemmenspannung proportionaler „Stromverlust“.

Die Gleichung der I-U-Kennlinie der linearen Stromquelle ergibt sich entsprechend der Gleichung (2.4):

$$I = I_\mathrm{q} - G_i\, U \tag{2.6}$$

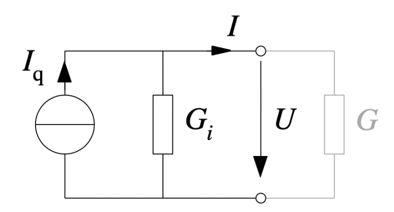


Abbildung 2.7.: Lineare Stromquelle mit idealer Stromquelle, Innenwiderstand und Lastwiderstand (die letzten zwei Grössen sind hier als Leitwerte angegeben)

2.3. Intermezzo – Bezugspfeilsysteme

Physikalische Grössen wie die elektrische Ladung und die Energie besitzen bei der Verschiebung durch eine Gebietsgrenze einen physikalisch eindeutig definierten Richtungssinn. Da aber der selbe Strom durch Verschiebung positiver oder in entgegengesetzter Richtung negativer Ladung zustande kommen kann, ist nicht a priori klar, wie die Stromstärke gegenüber der Ladungsverschiebung festzulegen ist. Historisch bedingt wurde für die physikalische Stromrichtung per Konvention (Abmachung) die Verschiebungsrichtung positiver Ladung festgelegt. Diese Konvention ist willkürlich aber allgemein anerkannt, obschon der Ladungstransport in Metallen durch negativ geladene Elektronen zustande kommt.

Zur Beschreibung oder Berechnung physikalischer Grössen müssen daher ihre **Bezugsrichtungen** festgelegt werden. Damit erhalten die betrachteten Grössen ein Vorzeichen: Ist diese Grösse positiv, so deckt sich die Bezugsrichtung mit dem tatsächlichen oder konventionellen Richtungssinn der betrachteten Grösse, ist sie negativ, liegt sie entgegengesetzt.

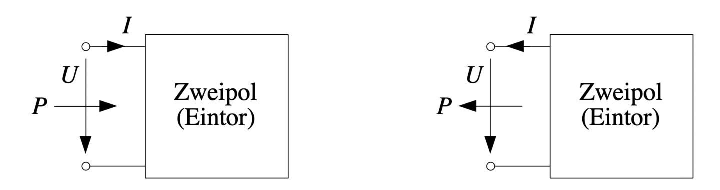


Abbildung 2.8.: Zweipol mit eingetragenen Bezugsrichtungen für Spannung U, Stromstärke I und Energiefluss P (Energiestrom: $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$)
Es sind hier die beiden grundsätzlichen Varianten dargestellt.

Der Energiestrom $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ am Tor der Zweipols wird durch die Grössen U und I bestimmt. Dabei können nicht alle Kombinationen von Bezugsfeilen sinnvoll gewählt werden, wenn der formale Zusammenhang $P = U\,I$ in allen Situationen gelten soll. Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene, aber gleichberechtigte **Bezugspfeilsysteme**, welche sich durch die Festlegung der Richtung der Energieströme P unterscheiden. Die Festlegung einer Bezugsrichtung für P lässt zwei Varianten für die Wahl der Bezugsrichtungen von U und I offen: „*parallele*“ oder „*antiparallele*“ Pfeilrichtungen. Welches von den beiden Systemen benutzt wird ist willkürlich, insbesondere können je nach Situation beide nebeneinander eingesetzt werden, wie z. B. in den Abb. 2.6 und 2.7, wo für die linearen Quellen das eine und für den Lastwiderstand das andere Bezugspfeilsystem gilt.

2.3.1. Abnehmerbezugspfeilsystem

Im *Abnehmer-Bezugspfeilsystem* zeigt die Bezugsrichtung des Energieflusses in das Tor des Zweipols hinein (siehe Abb. 2.8, linke Seite und die Beispiele aus Abb. 2.9). Damit sind die Bezugsrichtungen der Spannung und der Stromstärke „*parallel*“ zueinander. Der gelegentlich auch benutzte Begriff Verbraucherpfeilsystem ist unzutreffend, da Energie nicht „verbraucht“, sondern nur ausgetauscht oder mit ihrem Träger verschoben werden kann.

2.3.2. Quellenbezugspfeilsystem

Im *Quellen-Bezugspfeilsystem* zeigt die Bezugsrichtung des Energieflusses aus dem Tor des Zweipols heraus (siehe Abb. 2.8, rechte Seite und die Beispiele aus Abb. 2.10). Damit liegen

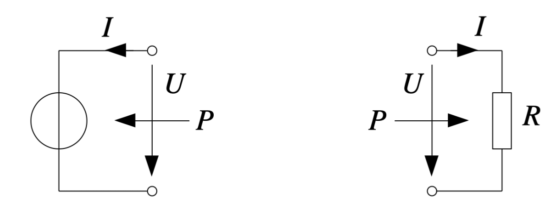


Abbildung 2.9.: Abnehmerpfeilsystem für aktive und passive Zweipole
Für die ideale Spannungsquelle sind dabei zwei Betriebsarten möglich: *aktiv wirkend* für $P < 0$ und *passiv wirkend* für $P > 0$. Der Widerstand kann nur passiv betrieben werden: also $P > 0$.

die Bezugsrichtungen der Spannung und der Stromstärke „*antiparallel*“. Der gelegentlich auch benutzte Begriff Erzeugerpfeilsystem ist unzutreffend, da keine Energie „erzeugt“ werden kann und sollte vermieden werden.

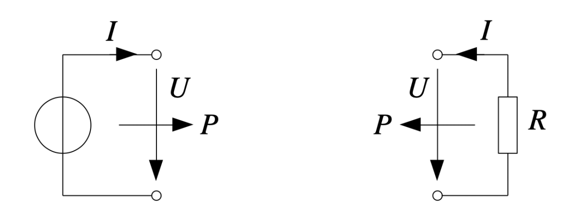


Abbildung 2.10.: Quellenpfeilsystem für aktive und passive Zweipole
Für die ideale Spannungsquelle sind dabei zwei Betriebsarten möglich: *aktiv wirkend* für $P > 0$ und *passiv wirkend* für $P < 0$. Der Widerstand kann nur passiv betrieben werden: also gilt hier grundsätzlich $P < 0$.

2.4. Belastete Lineare Quellen

2.4.1. Arbeitspunkt

Wird eine lineare Quelle durch einen Widerstand oder ein anderes Objekt belastet, so stellt sich ein **Arbeitspunkt** ein, d. h. eine lastabhängige Spannung und eine entsprechende Stromstärke. Rechnerisch sind diese Werte einfach zu bestimmen, sofern die Charakteristik (Kennlinie) der Last als geschlossene Formel vorliegt. Dazu muss ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten U und I gelöst werden. Zum Beispiel für eine Lineare Spannungsquelle mit einem Lastwiderstand (siehe Abb. 2.6):

$$\begin{aligned} \text{Quellen-Charakteristik}: \quad & U = U_\text{q} - R_i\, I \\ \text{Last-Charakteristik}: \quad & U = R\, I \end{aligned}$$

Nach Eliminieren von U und Auflösen nach I erhält man folgenden Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{U_\mathrm{q}}{R+R_i} \\
U &= \frac{R}{R+R_i}\,U_\mathrm{q} = \frac{1}{1+R/R_i}\,U_\mathrm{q} \\
P &= \frac{U_q^2}{(R+R_i)^2}\,R
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist graphisch in Abb. 2.11 dargestellt.

Das dazu duale Problem mit einer Linearen Stromquelle und einem durch seinen Leitwert definierten Lastwiderstand ergibt (siehe Abb. 2.7):[8]

$$\begin{aligned}
U &= \frac{I_\mathrm{q}}{G+G_i} \\
I &= \frac{G}{G+G_i}\,I_\mathrm{q} = \frac{1}{1+G/G_i}\,I_\mathrm{q} \\
P &= \frac{I_q^2}{(G+G_i)^2}\,G
\end{aligned}$$

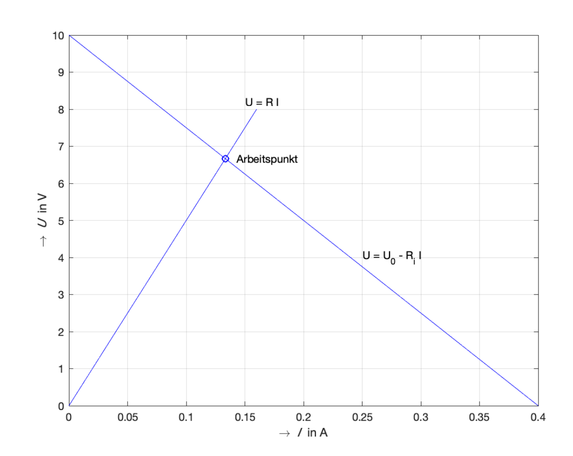


Abbildung 2.11.: Mit Widerstand belastete Lineare Quelle
Die Kennlinie der Quelle ist in einem Quellenbezugspfeilsystem, die des Widerstandes in einem Abnehmerbezugspfeilsystem.

[8] *Dualität*: siehe Anhang C

Beispiel: **Zusamenschaltung Linearer Quellen**

Als Energiequelle werden vielfach mehrere Batterien parallel geschaltet um genügend Strom liefern zu können. Batterien verhalten sich modellmässig wie Lineare Spannungsquellen. Betrachtet man zwei Quellen, welche ohne gemeinsame Last zusammengeschaltet sind, so kann eine davon als Quelle, die andere als Last betrachtet werden (siehe Abb. 2.12).

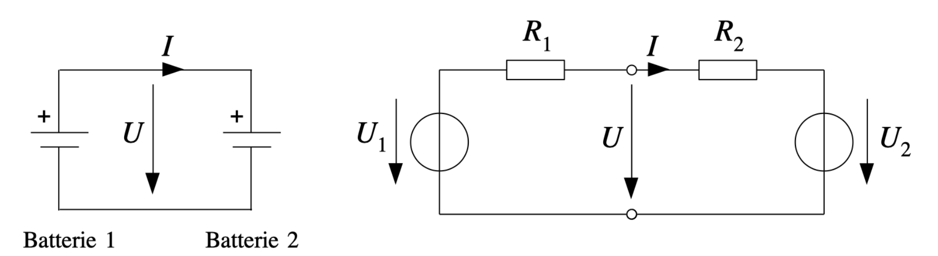


Abbildung 2.12.: Parallelgeschaltete Batterien mit Spannungsquellen-Ersatzmodell

Die beiden Charakteristika lauten – dabei wird Batterie 2 als Last betrachtet für die das Abnehmerbezugspfeilsystem gilt (daher das negative Vorzeichen der Stromstärke):

$$\begin{aligned} \text{Quellen-Charakteristik 1 :} \quad & U = U_1 - R_1\, I \\ \text{Last-Quellen-Charakteristik 2 :} \quad & U = U_2 - R_2\,(-I) \end{aligned}$$

Nach Auflösung erhält man

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} \\ U &= \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_1\, G_1 + U_2\, G_2}{G_1 + G_2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist graphisch in Abb. 2.13 dargestellt.

Sind nun die Leerlaufspannungen der beiden Quellen verschieden, so fliesst ein Ausgleichstrom, was zum Entladen der Batterie mit der grösseren Leerlaufspannung führt. Die dabei umgelagerte Energie wird in den Innenwiderständen dissipiert und steht für eine externe Last nicht mehr zur Verfügung.[9] Das Parallel-Schalten von Batterien sollte daher nur mit Batterien mit identischem Ladezustand – zumindest mit identischer Leerlaufspannung – erfolgen, damit kein Ausgleichsstrom fliessen kann.

□

2.4.2. Leistungsanpassung

Betrachten wir z. B. die belastete Lineare Spannungsquelle nach Abb. 2.6. Wie verläuft die von der Quelle an die Last abgegebene Leistung in Funktion des Lastwiderstands, der Stromstärke oder der Spannung? Bei Kurzschluss ($R = 0$) und bei Leerlauf der Quelle ($R \to \infty$) kann keine Energie zur Last fliessen, da in diesen Fällen entweder die Spannung oder die Stromstärke Null ist. Für welchen Lastwiderstandswert oder unter welchen Bedingungen ist die an die Last von der linearen Quelle abgegebene Leistung maximal?

[9] *Dissipation*: Process bei dem die Energie nicht reversibel umgeladen wird

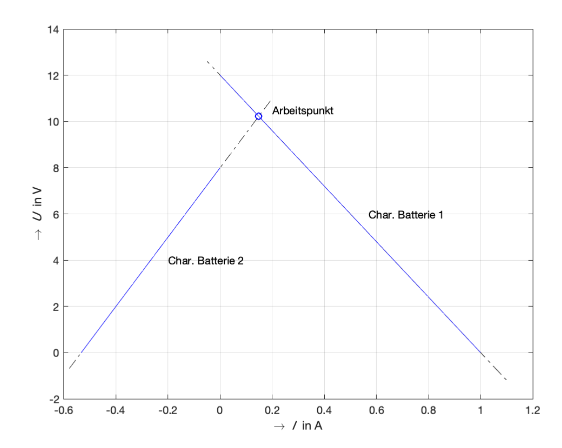


Abbildung 2.13.: Modell zweier parallel geschalteten Batterien
Beide linearen Quellen sind aktive Elemente, wobei die erste Spannungsquelle aktiv wirkt, die zweite als Last passiv.

Ausgehend von der normierten Kennlinie einer linearen Quelle, wie in Abb. 2.5 dargestellt, ist aus Symmetriegründen die Leistung $P = U\,I$ genau in der Mitte dieser Kennlinie maximal. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{U_{\text{opt}}}{U_0} &= \frac{1}{2} &&\rightarrow \quad U_{\text{opt}} = \frac{U_0}{2} \\
\frac{I_{\text{opt}}}{I_0} &= \frac{1}{2} &&\rightarrow \quad I_{\text{opt}} = \frac{I_0}{2} \\
& &&\rightarrow \quad P_{max} = U_{\text{opt}}\,I_{\text{opt}} = \frac{U_0\,I_0}{4} = \frac{U_0^2}{4\,R_i} = \frac{I_0^2\,R_i}{4} \\
& && \quad\;\; R_{opt} = \frac{U_{\text{opt}}}{I_{\text{opt}}} = \frac{U_0}{I_0} = R_i
\end{aligned}
$$

Der leistungsoptimale Betriebspunkt wird für lineare Quellen offenbar erreicht, wenn die Last einen Widerstand aufweist, welcher dem Innenwiderstand der Quelle entspricht.

Achtung: Dieses Ergebnis ist nur für Lineare Quellen gültig! Bei nichtlinearen Quellen-Kennlinien muss der optimale Arbeitspunkt Punkt für Punkt gesucht werden. Dies ist insbesondere bei Photovoltaik-Anlagen der Fall, wo bei wechselnden Beleuchtungsverhältnissen die Last regelungstechnisch dem optimalen Betriebspunkt nachgeführt werden muss, da die Kennlinie nicht nur nichtlinear ist, sondern auch von der Lichteinstrahlung abhängt (siehe Abb. 2.14).

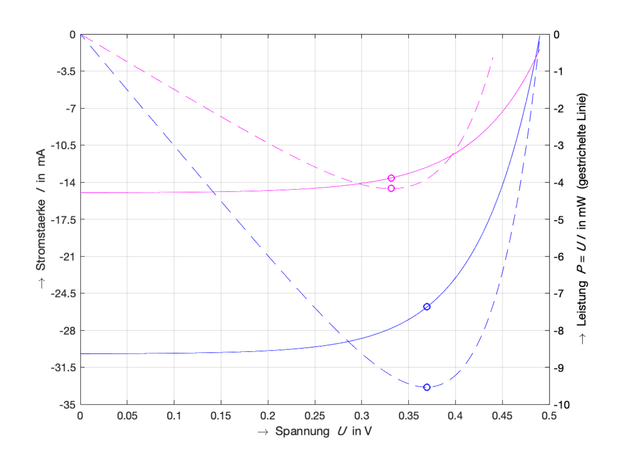


Abbildung 2.14.: I-U-Charakteristika (durchgezogene Linien) und optimale Betriebspunkte für eine Solarzelle bei zwei verschiedenen Beleuchtungsstärken
Die gestrichelten Linien entsprechen den Leistungen, welche je nach Lastwiderstand abgegeben werden können. Es ist klar ersichtlich, dass in den beiden Fällen nicht der selbe Lastwiderstand die maximale Leistung liefert.

3. Bilanzgesetze und Anwendungen

3.1. Kirchhoff'sche Regeln

Die Kirchhoff'schen Regeln sind für die Elektrostatik und -quasistatik von zentraler Bedeutung und beschränken sich nicht auf lineare Schaltungen, da sie Konsequenzen aus der Ladungs- und Energieerhaltung sind, welche auch für nichtlineare Komponenten Gültigkeit aufweisen. Der praktische Nutzen dieser Regeln liegt darin, dass sie sich auf direkt messbare Grössen beziehen, wie Stromstärken und Spannungen.

3.1.1. Knotensatz

Unter Knoten versteht man allgemein ein beliebiges Raumgebiet. Dieses Gebiet ist durch eine geschlossene Fläche begrenzt, die Hüllfläche oder Gebietsgrenze. Bei elektrischen Schaltungen, werden als Knoten sinnvollerweise Punkte mit eigenem Potenzial gewählt, wo zwei oder mehr Leiter zusammenstossen (Kontaktpunkte). Der Knotensatz ist eine Konsequenz des **Ladungserhaltungsgesetzes**:

> Die in einem beliebigen Gebiet enthaltene Ladung kann nur durch Ladungstransport über die Gebietsgrenze verändert werden.

Wenn angenommen wird, dass es zu keinem Ladungszuwachs oder -abnahme in einem bestimmten Gebiet kommt, so muss zwangsläufig die Bilanz über die Stromstärken durch die Gebietsgrenze zu jedem Zeitpunkt Null ergeben:

Knotensatz

> Für jedes willkürlich wählbare Raumgebiet gilt: Die Summe aller durch die Gebietsgrenze fliessenden Stromstärken ist Null. Für jede Ladung die in einen Knoten hinein fliesst, muss zur selben Zeit eine identische Ladung herausfliessen.

Bemerkungen:

- Die Summe der Stromstärken muss natürlich deren Bezugsrichtungen berücksichtigen: In das Gebiet hinein zeigende Richtungen müssen in der Bilanz mit einem anderen Vorzeichen berücksichtigt werden als die heraus zeigenden Richtungen. Es ist also nicht notwendig für die Ströme vorab die technische Stromrichtung zu ermitteln.
- Genau genommen gilt dieses Gesetz nur für Ladungströme in der Elektro-Quasistatik, solche die durch Ladungstransport zustande kommen. Im Falle von zeitlich veränderlichen Feldern müssen auch so genannte Verschiebungsstromdichten in die Bilanz integriert werden.

3.1.2. Maschensatz

Unter Masche verstehen wir allgemein einen beliebigen aber geschlossenen Weg oder Pfad. Dieser Weg kann als Rand einer offenen Fläche verstanden werden. Zum Weg wird eine willkürlich gewählte Umlaufrichtung oder Zählrichtung festgelegt. Bei elektrischen Schaltungen, werden als Maschen sinnvollerweise geschlossene Wege entlang von Leiterbahnen gewählt. Der Maschensatz ist eine Konsequenz des **Energieerhaltungsgesetzes**:

> Die Verschiebung eines Ladungsträgers entlang eines geschlossenen Pfads, kann nicht zu einer Änderung der Energiebilanz – der dabei insgesamt umgesetzten Energie – führen.

In die Elektrostatik und für stationäre Verhältnisse lassen sich alle Spannungen aus Potentialdifferenzen bestimmen. In diesem Fall ist die Bedeutung des Maschensatzes im Zusammenhang mit der Energiebilanz offensichtlich: wird eine Ladung entlang einer Masche für einen vollen Umlauf bewegt, so kann dabei zuletzt keine Energie freigesetzt oder gebunden werden. Das Potential des Startpunktes ist auch das des Endpunktes, da die beiden Punkte zusammenfallen.

Maschensatz

> Für jeden willkürlich gewählten und geschlossenen Pfad ist die Summe der Teilspannungen entlang des Wegs Null.

Bemerkungen:

- Die Summe der Spannungen muss natürlich deren Bezugsrichtungen berücksichtigen: Spannungsichtungen im Umlaufsinn müssen in der Bilanz ein anderes Vorzeichen aufweisen als Richtungen im Gegensinn.
- Genau genommen gilt dieses Gesetz nur für Bilanzen in der Elektrostatik. Im Falle von zeitlich veränderlichen Feldern müssen auch so genannte induzierte Spannungen in die Bilanz integriert werden.

3.2. Grundschaltungen mit Widerständen

3.2.1. Serie- oder Reihenschaltung

Unter Serieschaltung von Zweipolen versteht man die Zusammenschaltung bei der der selbe Strom durch die einzelnen Zweipole fliesst.

Der zusammengesetzte Zweipol wird so wieder zu einem Zweipol mit der der Summe der Einzelspannungen als resultierende Spannung.

$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 \\ U &= U_1 + U_2 \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften sind unabhängig von der Linearität der Zweipole gültig. In Fall von nichtlinearen Kennlinien kann die resultierende Kennline durch graphische Addition der Spannungen ermittelt werden.

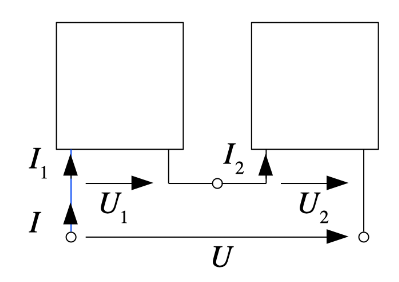


Abbildung 3.1.: Allgemeine Serieschaltung zweier Zweipole

Ersatwiderstand

Das Verhalten der Serieschaltung von n Widerständen mit spannungs-, bzw. stromunabhängigen Widerstandswerten R_k kann durch einen einzigen Widerstand (Ersatzwiderstand) mit Widerstandswert R dargestellt werden:

$$\boxed{R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \tag{3.1}$$

Dieses Ergebnis resultiert direkt aus der Tatsache, dass der selbe Strom durch alle Widerstände fliesst. Die Gesamtspannung ist somit die Summe der Teilspannungen.

Spannungsteilerschaltung

Folgende Schaltung wird Spannungsteilerschaltung genannt:

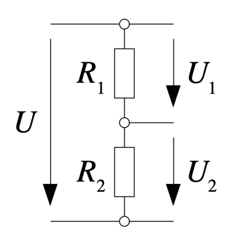


Abbildung 3.2.: Spannungsteilerschaltung mit zwei Stufen

Gesucht wird die Spannung U_k mit $k = \{1, 2\}$ an den Ausgangsklemmen, wenn die Spannung U an den Eingangsklemmen anliegt. Wir nehmen dabei an, dass die Ausgangsklemmen nicht belastet sind. Der Strom durch die in Serie geschalteten Widerstände lässt sich mit den Ersatzwiderstand R bestimmen. Verallgemeinert für n Stufen, erhält man für die gesuchte Spannung U_k:

$$U_k = R_k\, I = R_k\, \frac{U}{R} = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \ldots R_n}\, U \quad \text{mit} \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

3.2.2. Parallelschaltung

Unter Parallelschaltung von Zweipolen versteht man die Zusammenschaltung bei der die selbe Spannung an den einzelnen Zweipole hängt.

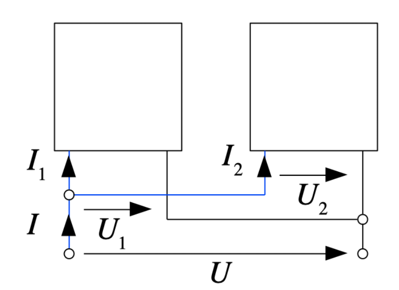


Abbildung 3.3.: Allgemeine Parallelschaltung zweier Zweipole

Der zusammengesetzte Zweipol wird so wieder zu einem Zweipol mit der der Summe der Einzelsstromstärken als resultierende Stromstärke.

$$\begin{aligned} U &= U_1 = U_2 \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften sind unabhängig von der Linearität der Zweipole gültig. In Fall von nichtlinearen Kennlinien kann die resultierende Kennline durch graphische Addition der Stromstärken ermittelt werden.

Ersatzleitwert

Das Verhalten der Serieschaltung von n Widerständen mit spannungs-, bzw. stromunabhängigen leitwerten G_k kann durch einen einzigen Widerstand (Ersatzwiderstand) mit Leitwert G dargestellt werden:

$$\boxed{G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n} \tag{3.2}$$

Dieses Ergebnis resultiert direkt aus der Tatsache, dass die selbe Spannung an allen Widerständen herrscht. Die Gesamtstromstärke ist somit die Summe aller Teilstromstärken.

Stromteilerschaltung

Folgende Schaltung wird Stromteilerschaltung genannt:

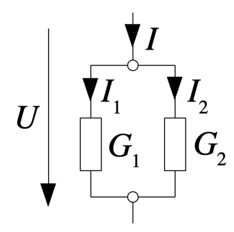


Abbildung 3.4.: Stromteilerschaltung mit zwei Pfaden

Gesucht wird die Stromstärke I_k mit $k = \{1, 2\}$ in den einzelnen Widerständen, wenn die Gesamtstromstärke I durch die Schaltung liesst. Die Spannung über die geschalteten Widerstände lässt sich mit den Ersatzleitwert G bestimmen. Verallgemeinert für n Stufen, erhält man

für die gesuchte Stromstärke I_k:

$$I_k = G_k\, U = G_k\, \frac{U}{G} = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \ldots G_n}\, U \quad \text{mit} \;\; k = 1,\, 2, \ldots,\, n$$

3.2.3. Stern- Dreieck-Umwandlung

Die Dreiecksschaltung kann in eine äquivalente Sternschaltung umgerechnet werden und umgekehrt. Die folgenden Formeln gelten für die in der Abb. 3.5 angegebenen Widerstandsbezeichnungen und deren Reihenfolge. Beachten Sie dabei die Dualität zwischen den beiden Umrechnungsformeln: Widerstandswerte werden durch Leitwerte ersetzt und umgekehrt (siehe Anhang C).

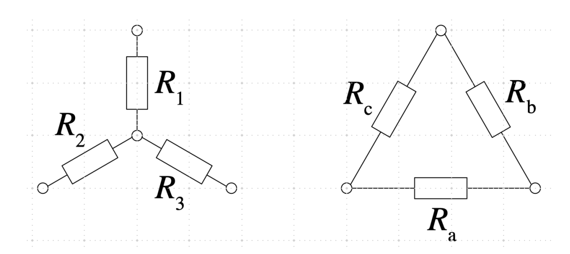


Abbildung 3.5.: links: Stern-Schaltung rechts: Dreiecks-Schaltung
Der Widerstand mit Index a liegt gegenüber dem mit Index 1, usw.

Dreieck → Stern

$$R_1 = \frac{R_\mathrm{b}\, R_\mathrm{c}}{R} \quad R_2 = \frac{R_\mathrm{a}\, R_\mathrm{c}}{R} \quad R_3 = \frac{R_\mathrm{a}\, R_\mathrm{b}}{R} \quad \text{mit} \quad R = R_\mathrm{a} + R_\mathrm{b} + R_\mathrm{c}$$

Stern → Dreieck

$$G_\mathrm{a} = \frac{G_2\, G_3}{G} \quad G_\mathrm{b} = \frac{G_1\, G_3}{G} \quad G_\mathrm{c} = \frac{G_1\, G_2}{R} \quad \text{mit} \quad G = G_1 + G_2 + G_3$$

Zur Herleitung der Umrechnungsformeln, müssen die Werte der resultierenden Widerstände zwischen zwei gleichen Klemmen der beiden Schaltungen gleichgesetzt werden.

3.2.4. Nichtlineare Elemente

Nicht alle passiven Bauelemente haben lineare Kennlinien. Bei deren Behandlung tauchen Fragen auf, welche für lineare Elemente bedeutungslos sind, wie z. B. die Unterscheidung zwischen statischen und dynamischen Kennlinien oder die Stabilität eines Arbeitspunktes.

Arbeitspunktstabilität

Bei nichtlinearen Kennlinien können sich theoretisch mehrere Arbeitspunkte einstellen. Diese können stabil oder instabil sein. Das Verhalten hängt von den Umständen ab, wobei zwischen der statischen und den dynamischen Kennlinien der nichtlinearen Last unterschieden werden muss. Die statische Kennlinie ist im Allgemeinen für den stationären Betrieb gültig. Sie stellt sich erst nach Erreichen eines globalen Gleichgewichtszustands ein – z. B. bei Thermistoren

nach Erreichen einer (konstanten) Betriebstemperatur. Bei schnellen Vorgängen, wo sich kein Gleichgewicht sofort einstellen kann, folgt der Arbeitspunkt der Last einer dynamischen Kennlinie, welche nicht zwingend deckungsgleich mit der statischen ist. Ob nun ein Arbeitspunkt stabil ist oder nicht, kann an Hand des durch die Quelle gelieferten Energieflusses (Leistung) und der in der Last dissipierten Leistung unter Berücksichtigung des (dynamischen) Lastverhaltens abgeschätzt werden. Stabil bedeutet dabei, dass die Energiebilanz stationär ist, sich die Leistungen also zeitlich nicht mehr verändern. Dies soll an Hand des folgenden Beispiels illustriert werden.

Beispiel – Lichtbogenlampe

Die Spannung als Funktion der Stromstärke an einem Lichtbogen, bzw. dessen stationäre U-I-Kennlinie, wird durch die Ayston'sche Formel $U = a/I + b$ beschrieben. Für eine Lichtbogenlampe sollen die Werte $a = 160\,\mathrm{W}$ und $b = 60\,\mathrm{V}$ betragen. Letztere Parameter hängen vom Elektrodenmaterial der Lampe ab. Diese Lampe wird wird mit einer Gleichspannung von $U_\mathrm{q} = 220\,\mathrm{V}$ und einem Vorwiderstand $R_\mathrm{v} = 30\,\Omega$ betrieben.

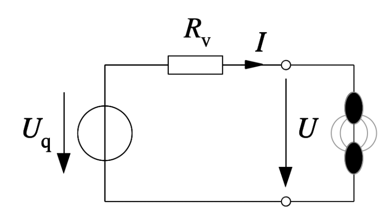


Abbildung 3.6.: Schaltungsschema einer Lichtbogenlampe

Gesucht ist der sich einstellende Arbeitspunkt, seine Stabilität, sowie der grösste Wert des Vorwiderstands bei dem die Lampe noch brennen kann.

Der Arbeitspunkt $(I \,|\, U)$ ergibt sich durch Lösen der beiden Gleichungen nach I:

$$\begin{aligned} U &= \frac{a}{I} + b \\ U &= U_\mathrm{q} - R_\mathrm{v}\, I \\ \frac{a}{I} + b &= U_q - R_\mathrm{v}\, I \\ &\rightarrow \quad R_\mathrm{v}\, I^2 + (b - U_\mathrm{q})\, I + a = 0 \\ \text{ergibt} \quad & I_1 = 4.00\,\mathrm{A} \quad \text{und} \quad I_2 = 1.33\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Der Arbeitspunkt $(I_1 \,|\, U_1) = (4.00\,\mathrm{A} \,|\, 100\,\mathrm{V})$ ist im Gegensatz zum zweiten stabil, wie aus den Kennlinien in der Abb. 3.7 entnommen werden kann.

Der maximale Quelleninnenwiderstand ergibt sich, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung verschwindet. Dies liefert $R_\mathrm{v} = 40\,\Omega$. Die entsprechende Quellenkennlinie ist in der Abb. 3.7 ebenfalls eingetragen. Dabei gibt es nur noch einen einzigen Arbeitspunkt.

Ohne Vorwiderstand – also mit einer idealen Spannungsquelle – kann sich kein stabiler Arbeitspunkt einstellen. Ein eindeutiger Betrieb wäre mit einer idealen Stromquelle möglich.

□

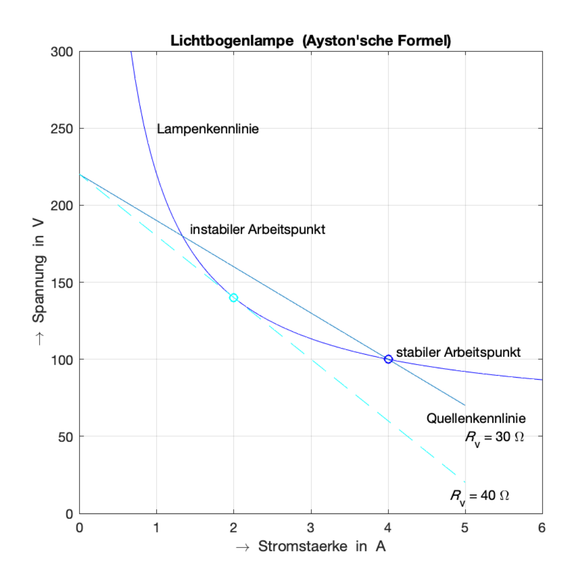


Abbildung 3.7.: Betriebskennlinie und Arbeitspunkt einer Lichtbogenlampe
Punkte auf der Quellenkennlinie links vom instabilen Arbeitspunkt (AP) geben für einen stationären Betriebspunkt zu wenig Energie an die Last ab. Dadurch kann sich ein Gleichgewicht nur bei Leerlauf der Quelle einstellen, wo kein Strom mehr fliesst. Für Punkte rechts von instabilen AP sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. Die Quelle liefert mehr Energie als benötigt. Dadurch verschiebt sich der AP in Richtung stabiler AP. Rechts von diesem herrscht wiederum ein Zustand analog dem links vom instabilen AP. Abweichungen vom stabilen AP werden also „automatisch" wieder auf diesen zurückgeführt.

Graphische Lösungsverfahren

Wenn Kennlinien von nichtlinearen Objekten nur graphisch vorliegen, so muss unter Umständen die Zusammenfügung im Fall von Serie- oder Parallelschaltung ebenfalls graphisch erfolgen. Bei Parallelschaltung sind die Stromstärken für alle gemeinsamen Spannungen zusammen zu zählen, bei Serieschaltung, die Spannungen bei gemeinsamen Stromstärken.

Beispiel – Kennlinienglättung

Die Schaltung gemäss Abb. 3.8 zeigt die Ersatzschaltung einer analogen Telefonstation, der Leitung und des dazugehörenden Hörers.[1] Der PTC-Thermistor im Hörer sorgt dafür, dass der Strom I weitgehend unabhängig vom Leitungswiderstand R_{L} ist.

Mit der graphischen Lösung wird zuerst die PTC-Kennlinie (I-U-Kennlinie gemäss Abb. 3.9) mit der des 820 Ω-Widerstands parallel geschaltet: die Stromstärken werden für die gemeinsamen Spannungen addiert. Das Ergebnis wird dann mit der Kennlinie des 130 Ω-Widerstands in Serie geschaltet: die Spannungen werden für die gemeinsamen Stromstärken addiert. Die resultierende Kennlinie der Last ist in der Abb. 3.9 als „Hörer-Kennline" bezeichnet.

[1] Diese, heute kaum noch gebrauchten Telefonsysteme, laufen unter der Bezeichnung POTS: Plain Old Telephone System.

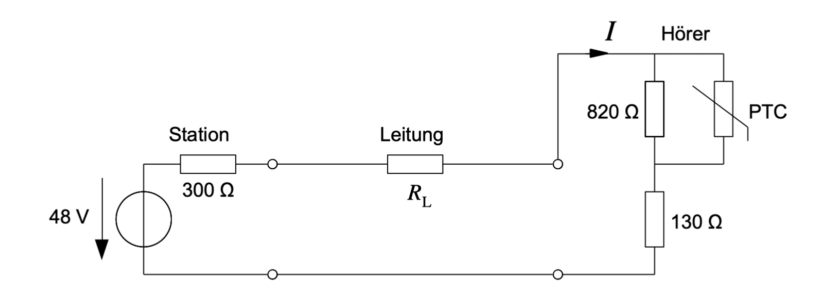


Abbildung 3.8.: Schaltschema einer analogen Telefonstation

Der Widerstand der Leitung wird als Quelleninnenwiderstand betrachtet. Die beiden Extremwerte $R_\mathrm{L} = 0\,\Omega$ und $R_\mathrm{L} = 1\,\mathrm{k}\Omega$ führen auf zwei verschiedene Quellenkennlinien.

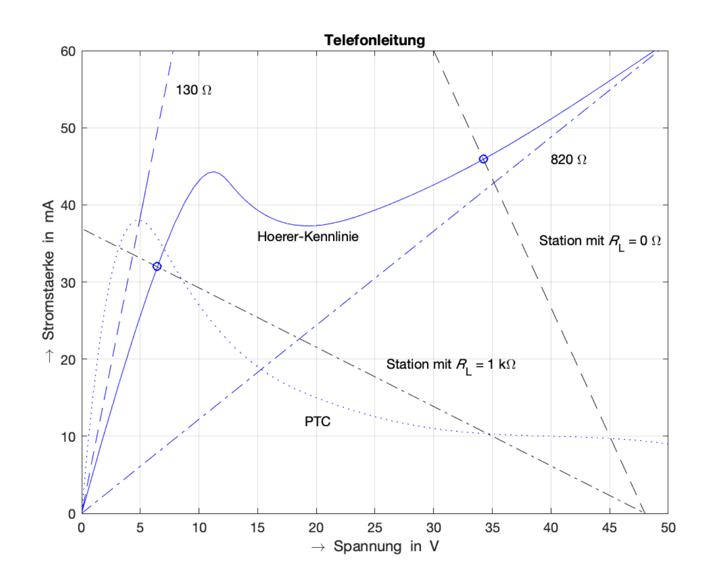


Abbildung 3.9.: Kennlinien-Glättung mit PTC

Durch Vergleich der beiden eingetragenen Arbeitspunkte, stellt man fest, dass die Stromstärke zwischen den Grenzwerten 32 mA und 46 mA liegt, nahezu unabhängig vom doch grossen Wertebereich des Leitungswiderstands. Bemerkenswert, wie mit passiven Elementen eine günstige Adaptivität realisiert werden kann.

□

4. Berechnung Linearer Schaltungen

Für die Berechnung der elektrischen Schaltungsgrössen (Spannungen, Stromstärken, Leistungen) gibt es neben den Kirchhoff'schen Regeln weitere zum Teil davon abgeleitete mathematische Verfahren, insbesondere für Lineare Schaltungen. Einige, wie die Quellenersatzschaltungen (Thévenin- und Norton-Äquivalente) sind für einfache Schaltungen, welche von „Hand" gerechnet werden können brauchbar, andere eignen sich als numerische Berechnungsalgorithmen für komplexe Schaltungen. Im Allgemeinen lassen sich keine allgemeingültige Empfehlungen oder Rezepte für die Wahl eines bestimmten Verfahrens, welches am einfachsten und am effizientesten zum Ziel führen soll angeben.

4.1. Quellenersatzschaltungen

Da sich die Kennlinie einer linearen Spannungsquelle nicht von der einer linearen Stromquelle unterscheiden lässt, kann frei gewählt werden, welches der beiden Quellenmodelle benutzt werden soll. Je nach Anwendung eignet sich das eine besser als das andere.

Zudem kann gezeigt werden, dass für eine beliebige Zusammenschaltung von idealen Quellen und linearen (ohmschen) Widerständen die U-I-Kennlinie immer eine Gerade bildet, egal wie kompliziert die Schaltung aussieht. Das bedeutet aber, dass das Klemmenverhalten jeder (linearen) Widerstandsschaltung durch eine **Ersatzspannungsquelle**- oder **Ersatzstromquelle** wiedergeben werden kann (siehe Abb. 4.1).

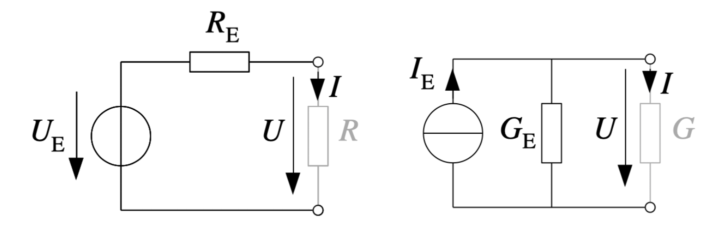


Abbildung 4.1.: Quellenersatzschaltungen
links: Spannungsquellenersatzschaltung   rechts: Stromquellenersatzschaltung

Um eine Quellenersatzschaltung für eine beliebige lineare Schaltung zu finden, müssen nur deren Leerlaufspannung U_0 und Kurzschlussstromstärke I_0 ermittelt werden. Mit diesen zwei Parametern ist auch die Kennlinie der Ersatzquelle bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{Ersatzquellenspannung:} \quad & U_\mathrm{E} = U_0 \\ \text{Ersatzquellensstromstärke:} \quad & I_\mathrm{E} = I_0 \\ \text{Ersatzwiderstand:} \quad & R_\mathrm{E} = U_0/I_0 \\ \text{Ersatzleitwert:} \quad & G_\mathrm{E} = I_0/U_0 \end{aligned}$$

> Die Quellenersatzschaltungen beschreiben nur das elektrische Verhalten der linearen Quelle an den Klemmen (d. h. die Kennlinie) und nicht den inneren Aufbau des Zweipols.

Ergänzungen:

- Anstelle von Leerlaufspannung oder Kurzschlussstromstärke kann auch der Innenwiderstand $R_i = U_0/I_0$ oder -leitwert $G_i = I_0/U_0$ der linearen Schaltung direkt ermittelt werden. Dazu müssen alle Quellen der betrachteten Schaltung „Null“ gesetzt werden: d. h. Spannungsquellen kurzgeschlossen und Stromquellen leerlaufend, so dass nur noch ein reines Widerstandsnetzwerk übrig bleibt. Diese Widerstände können dann zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst werden, welcher dem Ersatzwiderstand entspricht. Je nach Schaltung, lassen sich somit zwei der Ersatzparameter einfacher als der dritte bestimmen.
- Ob eine Spannungsquellenersatzschaltung oder eine Stromquellenersatzschaltung bestimmt werden soll, hängt im Wesentlichen damit zusammen, ob die betrachteten Elemente seriell oder parallel geschaltet sind. Bei Parallelschaltung bietet sich natürlicherweise die Stromquelle, bei Serieschaltung die Spannungsquelle an. Für gemischt angeschlossene Elemente kann nach Bedarf zwischen den Ersatzquellen gewechselt werden, um so stufenweise die endgültige Ersatzschaltung zu erhalten.
- Im angelsächsischen Sprachgebrauch hat sich der Begriff **Thevenin Equivalent Circuit** für die Spannungsquellenersatz- und **Norton Equivalent Circuit** für die Stromquellen ersatzschaltung eingebürgert.

Beispiel: Potentiometerschaltung

Um die belastete Potentiometerschaltung gemäss Abb. 4.2 (links) einfach berechnen zu können, kann das Potentiometer mit der idealen Quelle durch eine Spannungsersatzquelle dargestellt werden (rechts).

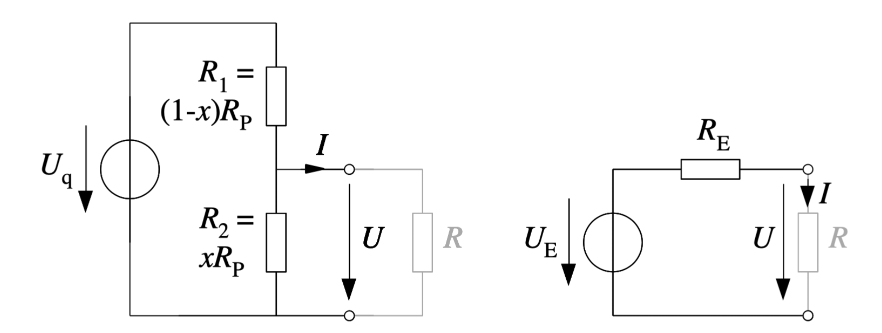


Abbildung 4.2.: Potentiometerschaltung und ihre Spannungsquellenersatzschaltung
Das Potentiometer wird hier durch die beiden Widerstände R_1 und R_2 dargestellt. Die Grösse x entspricht der normierten Stellung des Schleifers: $x = 0$ für unten, $x = 1$ für oben.

Für die Leerlaufspannung erhält man ziemlich direkt (Spannungsteiler bei $R \to \infty$):

$$U_\mathrm{E} = U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_\mathrm{q} = \frac{x\,R_\mathrm{p}}{(1-x)\,R_\mathrm{p} + x\,R_\mathrm{p}} U_\mathrm{q} = x\,U_\mathrm{q}$$

Dabei ist offensichtlich, dass U_E nicht mit U_q übereinstimmt, ausgenommen für $x = 1$.

Die Kurzschlussstromstärke kann auch ziemlich direkt ermittelt werden ($R = 0$):

$$I_\mathrm{E} = I_0 = \frac{U_\mathrm{q}}{R_1} = \frac{U_\mathrm{q}}{(1-x)\,R_\mathrm{p}}$$

Damit erhält man für den Ersatzwiderstand:

$$R_\mathrm{E} = \frac{U_0}{I_0} = x\,(1-x)\,R_\mathrm{p}$$

Das selbe Ergebnis ergibt sich durch „Null setzen“ (Kurzschliessen) der Quelle: Die Schaltung reduziert sich dabei auf die parallel geschalteten Widerstände R_1 und R_2:

$$R_\mathrm{E} = R_\mathrm{i} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(1-x)\,R_\mathrm{p}\,x\,R_\mathrm{p}}{(1-x)\,R_\mathrm{p} + x\,R_\mathrm{p}} = x\,(1-x)\,R_\mathrm{p}$$

Der Innenwiderstand ändert sich mit der Schleiferstellung: er ist unter anderem Null für $x = 0$ und $x = 1$ und maximal für $x = 1/2$.

□

Beispiel: Parallelschaltung zweier Gleichstromquellen

Die Schaltung gemäss der Abb. 4.3 (linke Seite) entspricht dem Modell eines Gleichstromgenerators (U_1, R_1), welcher eine Last (R) versorgt und gleichzeitig einen Akkumulator (U_2, R_2) lädt. Um das Verhalten dieser Schaltung z. B. aus der Sicht der Last berechnen zu können, ist es zweckmässig die beiden linearen Spannungsquellen durch eine Ersatzspannungsquelle ($U_\mathrm{E}, R_\mathrm{E}$) zu ersetzen (siehe Abb. 4.3, rechte Seite). Dazu wird der Lastwiderstand R gedanklich entfernt.

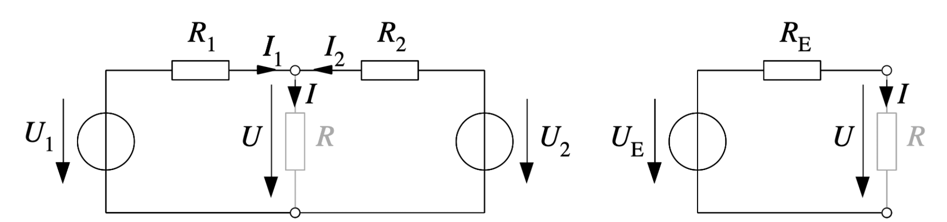


Abbildung 4.3.: Parallelschaltung zweier linearen Spannungsquellen mit Lastwiderstand
Diese Konfiguration findet sich häufig, wenn ein Gleichstromgenerator (U_1, R_1) einen Akkumulator (wiederaufladbare Batterie) auflädt und gleichzeitig eine Last (R) speist. In diesem Fall nimmt die durch die Quelle (U_2, R_2) modellierte Batterie Energie auf, d. h. wird passiv betrieben.

Für die Parallelanordnung von zwei linearen Spannungsquellen, ist es zweckmässig mit Stromquellenersatzschaltungen zu arbeiten. Die entsprechenden Parameter dieser Quellen sind nach der Umwandlung:

$$I_{10} = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{und} \quad G_1 = \frac{1}{R_1}$$
$$I_{20} = \frac{U_2}{R_2} \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{1}{R_2}$$

Parallelgeschaltet ergibt sich die Stromquellenersatzschaltung mit folgenden Parametern:

$$\text{Kurzschlussstromstärke:} \quad I_\mathrm{E} = I_{10} + I_{20} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$$

$$\text{Innenleitwert:} \quad G_\mathrm{E} = G_1 + G_2 = 1/R_1 + 1/R_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1\, R_2}.$$

Somit nach einer weiteren Umwandlung, die gesuchten Parameter der Spannungsquellenersatzschaltung:

$$\rightarrow \text{ Leerlaufspannung:} \quad U_\mathrm{E} = \frac{I_\mathrm{E}}{G_\mathrm{E}} = \frac{U_1\, R_2 + U_2\, R_1}{R_1\, R_2}$$

$$\text{Innenwiderstand:} \quad R_\mathrm{E} = \frac{1}{G_\mathrm{E}} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}.$$

Bemerkung: Der Ersatzwiderstand kann alternativ durch „Null setzen“ (Kurzschliessen) der beiden Spannungsquellen (U_1 und U_2) und Zusammenfassung der dann bleibenden parallelgeschalteten Widerständen R_1 und R_2 ermittelt werden. Hier ist aber der “Umweg“ über die Umwandlung zu Stromquellen wesentlich direkter.

□

4.2. Superpositionsprinzip

Die Linearitätseigenschaft eines Systems (siehe Anhang B) ermöglicht es in vielen Fällen eine Aufgabe in mehrere einfachere Teilaufgaben zu unterteilen und diese unabhängig voneinander zu lösen und daraus die Gesamtlösung additiv zusammenzusetzen.

> Die gemeinsame Wirkung zweier oder mehrerer voneinander unabhängigen Ursachen kann durch die Summe der Teilwirkungen dieser Ursachen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto y_1 = \mathrm{f}(x_1) \\ x_2 &\mapsto y_2 = \mathrm{f}(x_2) \\ \Rightarrow \quad x = x_1 + x_2 &\mapsto y = \mathrm{f}(x) = y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Damit kann, in Situationen wo in einem linearen System mehrere Ursachen eine physikalische Grösse beeinflussen, die Ermittlung des Gesamtzusammenhangs auf die vereinfachte Ermittlung der Teilzusammenhänge reduziert werden. Dieses Verfahren darf bei nichtlinearen Zusammenhängen selbstverständlich nicht angewendet werden.

Beispiel: Widerstandsnetzwerk mit zwei Quellen

Für das folgende lineare Netzwerk, bestehend aus zwei Widerständen und je eine ideale Spannungs- und Stromquelle, soll die Stromstärke, welche durch den Widerstand R_2 fliesst bestimmt werden.

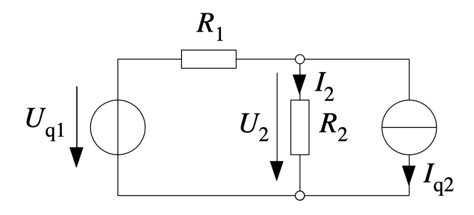


Abbildung 4.4.: Lineare Schaltung mit zwei Quellen

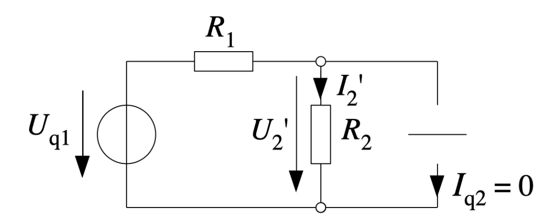


Abbildung 4.5.: Lineare Schaltung bei Null gesetzter Stromquelle

Im Sinne des Superpositionsprinzips werden die, durch die Quellen im Widerstand erzeugten Stromstärkenanteile getrennt bestimmt. Zunächst wird der Einfluss der Spannungsquelle betrachtet. Dazu muss die Stromquelle ausgeschaltet werden: $I_{q2} = 0$.

Für die Stromstärke erhält man

$$I_2' = \frac{U_{q1}}{R_1 + R_2}.$$

Danach wird die Spannungsquelle „ausgeschaltet“: $U_{q1} = 0$. Dies ergibt mit der Stromteilerregel

$$I_2'' = -\frac{G_2}{G_1 + G_2} I_{q2} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_{q2}.$$

Die Superposition liefert

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{U_{q1} - R_1 I_{q2}}{R_1 + R_2}.$$

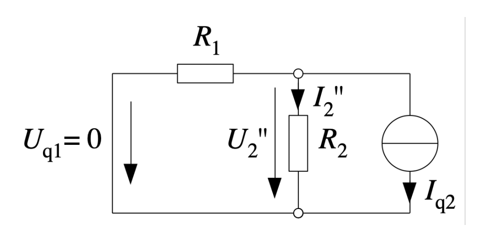


Abbildung 4.6.: Lineare Schaltung bei Null gesetzter Spannungsquelle

Bemerkung: Das „Nullsetzen“ der Quellen kann in den Schaltzeichen durch Weglassen der Kreise dargestellt werden. Somit ergibt sich ein Kurzschluss bei den Spannungs- und ein Leerlauf bei den Stromquellen.

□

4.3. Intermezzo – Aufstellen der benötigten Gleichungen zur Netzwerkberechnung

Die Berechnung eines linearen Netzwerks hat im allgemeinsten Fall doppelt so viele unbekannte Grössen wie Elemente in der Schaltung: $2z$ Spannungen und Stromstärken für z elementare Zweipole. Die konstitutiven Beziehungen der einzelnen Elemente – Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung bei Widerständen, sowie eingeprägte Spannungen oder Stromstärken durch Quellen – liefern z Gleichungen. Es müssen also weitere z Gleichungen aufgestellt werden, um alle Schaltungsgrössen zu bestimmen.

Jedes Element „hängt“ mit seinen Anschlüssen zwischen zwei Knoten. Besitzt das Netzwerk k Knoten, so können genau so viele Knotengleichungen – Strombilanzen – aufgestellt werden. Da jeder Strom des Netzwerkes von einem der Knoten herauskommt und in einem anderen hineinfliesst, muss eine der Knotengleichungen aus der Summe der anderen hergeleitet werden können. Das bedeutet, dass genau eine der Knotengleichungen – egal welche – überflüssig ist, da sie aus den anderen bestimmt werden kann. In diesem Zusammenhang spricht man von linearer Abhängigkeit. Somit können genau $k - 1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden: jede dieser Gleichungen enthält Information, welche nicht in den anderen enthalten ist. Daher fehlen noch $z - (k - 1)$ Gleichungen. Diese müssen offensichtlich durch Maschengleichungen – Energiebilanz – gebildet werden.

Bemerkung: **Ideen aus der Graphentheorie**

Das Netzwerk kann als *Graph* betrachtet werden, wobei die k Knoten des Netzwerks (ebenfalls) als *Knoten* und die z Zweipole als *Zweige* bezeichnet werden.[a] Ganz allgemein können die Knoten untereinander durch $k - 1$ Zweige verbunden werden, ohne dass sich dabei geschlossene Pfade bilden. Diese Verbindungszweige werden in der Graphentheorie *Äste* genannt und das resultierende Gebilde *Baum*. Zweige welche nicht zum Baum gehören werden als *Sehnen* bezeichnet. Es gibt also bei z Zweigen genau $z - k + 1$ Sehnen.

[a] Das Netzwerk soll *zusammenhängend* sein, also nicht in zwei oder mehr lose Teile zerfallen, wenn ein Knoten entfernt wird.

Für jede einzelne der $z - k + 1$ Sehnen kann eine Maschengleichung entlang der Äste des Baums gewählt werden – es gibt da verschiedene Möglichkeiten. Damit ist gewährleistet, dass die benötigte Anzahl Gleichungen zustande kommt und dass in jeder dieser Gleichungen Information steckt, welche nicht in den anderen steckt. Die so erhaltenen Gleichungen sind linear unabhängig.

Diese Vorgehensweise ist für beliebige Netzwerktopologien anwendbar, also nicht nur für *planare* Netztzwerke.[1]

Aus der Praxis sind mehrere Verfahren bekannt, mit denen Netzwerke berechnet werden können. Einige davon sind im Abschnitt 4.4 (Knotenpotentialverfahren) und im Anhang C

[1] Als *planar* werden Netzwerke (und Graphen) bezeichnet, welche ohne sich kreuzende Zweige in der Ebene gezeichnet werden können.

(Zweigstrom- und Zweigspannungsanalyse) als Beispiele vorgestellt. Es gibt allerdings noch weitere, wie z. B. die Kreisstromanalyse, welche hier nicht weiter verfolgt wird.

4.4. Inzidenzmatrix – Netzwerkanalyse mittels Knotenpotentialverfahren

Computer-Programme zur Berechnung von elektrischen Schaltungen benötigen ein systematisches Vorgehen. Unter anderem ist es notwendig die Struktur der Schaltung abzubilden. Dazu wird die so genante **Inzidenzmatrix** eingeführt. Dabei wird für jedes der z Elemente der Schaltung eine Zeile vorgesehen. Die Spalten der Matrix entsprechen den k Knoten der Schaltung. Hängt ein Element an einem bestimmten Knoten, so wird das entsprechende Element der Matrix mit einer "1" bezeichnet, ansonsten einer "0". Die Bezugsrichtungen der Ströme können durch ein negatives Vorzeichen beim „Zielknoten" angegeben werden.

Dies soll am Beispiel der Schaltung aus Abb. 4.7 gezeigt werden.

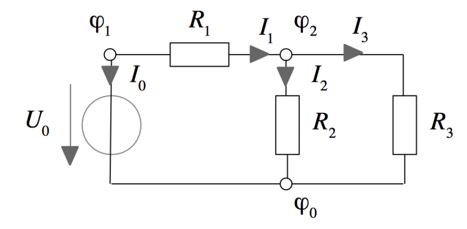


Abbildung 4.7.: Widerstandsnetzwerk mit idealer Spannungsquelle

Unter Berücksichtigung der Bezugsrichtungen ergibt sich für die Inzidenzmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die drei Spalten der Matrix entsprechen den Knotenpotentialen, die vier Zeilen den Elementen, wobei die erste Zeile die Anschlüsse der Spannungsquelle beschreibt.

Wenn die Bezugsrichtungen der Spannungen mit den gegebenen Richtungen der Stromstärken ein Abnehmerbezugspfeilsystem bilden, können mit der Inzidenzmatrix alle Spannungen aus den Potentialen der Schaltung bestimmt werden:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \cdot \varphi$$

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} U_0 &= \varphi_1 - \varphi_0 \\ U_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ U_2 &= \varphi_2 - \varphi_0 \\ U_3 &= \varphi_2 - \varphi_0 \end{cases}$$

Mit der transponierten Inzidenzmatrix können auch sämtliche Knotengleichungen direkt aufgestellt werden:[2]

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} -1 \cdot I_0 + 0 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 &= 0 \\ 1 \cdot I_0 + 1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 &= 0 \\ 0 \cdot I_0 - 1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 &= 0 \end{cases}$$

Dies liefert bis auf die Vorzeichen die Knotengleichungen des Beispiels. Das dieses Gleichungssystem singulär ist, ist an der verschwindenden *Spaltensumme* unschwer zu erkennen – lineare Abhängigkeit der Gleichungen.

Mit den Leitwerten der Elemente kann man die Stromstärken aus den Spannungen bestimmen und somit die Knotengleichungen mit den Potentialen formulieren:

$$\begin{array}{rl} \text{mit der (diagonalen) Leitwertmatrix } \mathbf{G}: & \mathbf{I} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{U} \\ \text{ergibt sich so für die Knotengleichungen} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \varphi = \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für die Spannungsquelle wurde stillschweigend der Leitwert G_0 eingesetzt. Dies ist modellmässig zulässig, da aber eine ideale Spannungsquelle keinen Widerstand aufweist ($R_0 = 0$), ist somit der Leitwert unendlich gross, was praktisch nicht handhabbar ist. Auf diese Schwierigkeit wird weiter unter eingegangen. Durch Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt sich zunächst:

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_2 + G_3 & -G_0 & -G_2 - G_3 \\ -G_0 & G_0 + G_1 & -G_1 \\ -G_2 - G_3 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das Aufstellen dieser Gleichungen ausgehend von der Inzidenzmatrix, ist für die numerische Berechnung von Vorteil, da systematisch vorgegangen werden kann. Allerdings hat das hier erhaltene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, enthält den undefinierten – unendlich grossen – Leitwert G_0 und noch keine Information über die durch die Quelle eingeprägte Spannung. Dies kann wie folgt behandelt werden:

- Das Gleichungssystem ist singulär: Die drei Knotengleichungen sind linear abhängig (siehe § 4.3). Eine davon, egal welche, muss entfernt werden. Da aber bei drei unbekannten Grössen auch drei Gleichungen notwendig sind, muss eine weitere Gleichung dazu kommen. Da noch Information über den Einfluss der Spannungsquelle fehlt, ist es naheliegend eine der überflüssigen Knotengleichngen, welche den unendlichen Leitwert G_0 enthält, durch $\varphi_1 - \varphi_0 = U_0$ zu ersetzen. Dabei erhält man z. B. durch Ersetzen der zweiten Gleichung:

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_2 + G_3 & -G_0 & -G_2 - G_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -G_2 - G_3 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[2] *Transposition*: Tausch von Zeilen und Spalten

- Das damit erhaltene Gleichungssystem hat aber unendlich viele Lösungen, da kein Referenzpotential definiert wurde: die Determinante der Matrix ist Null, wie durch elementare Berechnung überprüft werden kann.[3] Dazu kann eine der verbleibenden Knotengleichungen durch die Festlegung eines der Potentiale ersetzt werden: z. B. $\varphi_0 = 0$. Wiederum eignet sich dazu die übrigbleibende Gleichung welche noch den Leitwert G_0 enthält. Man erhält so:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -G_2 - G_3 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Lösung ergibt nach „Vorwärtseinsetzen“, da hier das System schon Treppenform aufweist:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0 \\ \varphi_1 &= U_0 \\ \varphi_2 &= \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} U_0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Mit der Inzidenzmatrix können alle Spannungen des Netzwerks bestimmt werden. Aus diesen dürfte es nicht schwer sein, auch die Stromstärken zu berechnen, mit Ausnahme der Stromstärke durch die Spannungsquelle, da deren Leitwert G_0 unendlich gross ist und im finalen Gleichungssystem nicht verwendet wurde. Diese Stromstärke muss nachträglich aus einer der beiden Knotengleichungen, wo die Quelle hängt, ermittelt werden.

[3] Durch Gauß- Elimination kann gezeigt werden, dass der Rang der Matrix 2 ist.

A. SI-Einheiten

Das **S**ystème **I**nternational d'Unités (SI-System) definiert die *sieben Basiseinheiten*: **Meter** für die Länge, **Kilogramm** für die Masse, **Sekunde** für die Zeit, **Ampère** für die Stromstärke, **Kelvin** für die Temperatur, **Mol** für die Stoffmenge und **Candela** für die Lichtstärke wie in der folgenden Tabelle aufgestellt:

Tabelle A.1.: SI-Basisgrössen und ihre Einheiten

Gebiet (Lehre von)	Basisgrösse		Basiseinheit	
	Name	Symbol	Name	Symbol
Geometrie (Raum)	Länge	l	Meter	m
Kinematik (Bewegung)	+ Zeit	t	Sekunde	s
Dynamik (Trägheit, Impuls)	+ Masse	m	Kilogramm	kg
Elektromagnetismus	+ elektrische Stromstärke	i, I	Ampère	A
Thermodynamik	+ Temperatur	T	Kelvin	K
Chemie	Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichttechnik	Lichtstärke	I_v	Candela	cd

In der 9. Ausgabe der Brochure des BIPM „*The International System of Units*" mit Gültigkeit ab 20. Mai 2019 [1] wurden einige grundlegende Änderungen vorgenommen: Die Basiseinheiten werden nicht mehr wie zuvor mittels Arbeitsnormalen und experimentellen Beschreibungen definiert, sondern durch numerische *Fixierung* der sieben folgenden „Definierenden" Konstanten indirekt festgelegt – einige davon fundamentale Naturkonstanten, wie die Lichtgeschwindigkeit:

Tabelle A.2.: Definierende Konstanten des SI

Definierende Konstante	Symbol	Numerischer Wert	Einheit
Übergangskonstante zw. den Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustands von Cesium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz (cps)
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	299 792 458	$m\,s^{-1}$
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$	J s
Elementarladung	e	$1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$	A s (C)
Boltzmann-Konstante	k	$1.380\,649 \cdot 10^{-23}$	$J\,K^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Photometrisches Strahlungsäquivalewnt	W_{cd}	683	$lm\,W^{-1}$

Mit dieser Konvention können die Basiseinheiten unabhängig von Materialeigenschaften und experimentellen Beschreibungen mit einer Genauigkeit realisiert werden, welche nur durch die

quantenmechanische Struktur der Natur und den technischen Möglichkeiten begrenzt wird. Das Konzept soll an den Einheiten Sekunde, Meter, Kilogramm und Ampère illustriert werden:

Sekunde

Die Sekunde ist definiert als die Dauer, die 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, welche durch die Transition der zwei Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands des ^{133}Cs-Atoms entsteht, benötigen:

$$1\,\mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

Meter

Der Meter entspricht der Länge welche das Licht im Vakuum in 1/299 792 458 s zurücklegt:

$$1\,\mathrm{m} = \frac{\mathrm{c}}{299\,792\,458}\,\mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458}\frac{\mathrm{c}}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

Kilogramm

Die Einheit Kilogramm kann mit den (exakten) Konstanten h, $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ und c wie folgt gebildet werden:

$$1\,\mathrm{kg} = \frac{\mathrm{h}}{6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}}\,m^{-2}\,\mathrm{s} = \frac{(299\,792\,458)^2}{(6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34})(9\,192\,631\,770)}\frac{\mathrm{h}\,\Delta\nu_{Cs}}{\mathrm{c}^2}$$

Hiermit ist das Kilogramm, im Gegensatz zum ursprünglichen Vergleich mit dem Urkilogramm, exakt definiert.

Ampère

Das Ampère entspricht der Stromstärke, welche dem Fluss von $1/(1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19})$ Elementarladungen pro Sekunden entspricht:[1]

$$1\,\mathrm{A} = \frac{\mathrm{e}}{1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

Mit diesen exakten Festlegungen können beliebige physikalische Zusammenhänge und Modelle benutzt werden, um die Basiseinheiten mit der gewünschten oder einer verbesserten Genauigkeit messtechnisch zu realisieren. Dabei sind neuerdings auch die magnetische und elektrische Feldkonstanten μ_0 und ϵ_0 nicht mehr exakt definiert:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\approx 4\pi\,10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \approx 1.256\,637 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{\mu_0\,\mathrm{c}^2} \approx 8.841\,941 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \end{aligned}$$

[1] Die ursprüngliche, jetzt obsolete Definition der Einheit *Ampère* wurde über die Kraftwirkung pro Leiterlänge, dem so genannten *Kraftbelag* (Kraft F pro Längeneinheit $\ell = 1\,\mathrm{m}$), die zwischen zwei stromdurchflossenen, unendlich langen, parallelen Leitern im Abstand r wirkt, festgelegt. Die Kraft treibt die Leiter auseinander, wenn die Ströme in den Leitern entgegengesetzt fliessen. Falls die Stromstärke I in beiden Leitern gleich gross ist, lautet der allgemeine formelmässige Zusammenhang für den Kraftbelag wie folgt:

$$F' = \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I^2}{r}$$

Der *magnetischen Feldkonstante* wurde dabei folgender Wert zugewiesen: $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$. Nach obiger Definition, fliesst also in der Leitung eine Stromstärke von $I = 1\,\mathrm{A}$, wenn der Leiterabstand $r = 1\,\mathrm{m}$ und die Kraft pro Meter Leiterlänge 0.2 N beträgt. Die Realisiergenauigkeit (Reproduzierbarkeit mittels einer Stromwaage) dieser Definition liegt bei einigen Millionstel ($1\,\mathrm{ppm} \equiv 10^{-6}$), was beim heutigen Entwicklungsstand der elektrischen Messinstrumente bei weitem nicht genügt.

Die Verfeinerung ihrer Werte muss experimentell erfolgen. Die Beziehung $\mu_0 \epsilon_0 = 1/\mathrm{c}^2$ bleibt allerdings bestehen.

Neben den Basiseinheiten gibt es noch *abgeleitete Einheiten* mit eigenen Namen. Zum Beispiel: Aus der Definition der Stromstärke ($I = \Delta Q/\Delta t$) ergibt sich für die *Einheit der elektrischen Ladung Q*:

$$[Q] = [I] \cdot [t] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \qquad \text{(Ampère-Sekunde)}$$

und daraus die abgeleitete Einheit *Coulomb*: $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$.

Wichtige Bemerkung: Die **eckigen Klammern** um das Symbol einer physikalischen Grösse X sind eine Kurzschreibweise für „*Einheit der Grösse X*“, hier z. B: $[Q] = \mathrm{A\,s} = \mathrm{C}$.

Eine Zusammenstellung von einigen wichtigen abgeleiteten Einheiten mit ihren Namen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:[2]

Tabelle A.3.: Einige abgeleitete Einheiten

Grösse	Name	Symbol	entsprechende Einheiten
Celsius Temperatur	Grad Celsius	°C	K (für Temp.-Differenzen)
Druck	Pascal	Pa	$\mathrm{N\,m^{-2}}$
Frequenz	Hertz	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$
Kraft	Newton	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Energie	Joule	J	N m, V A s
Energiestrom, Leistung	Watt	W	$\mathrm{J\,s^{-1}}$, V A
elektrische Ladung	Coulomb	C	A s
elektrische Spannung, Potential	Volt	V	$\mathrm{J\,A^{-1}\,s^{-1}}$
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$\mathrm{V\,A^{-1}}$
elektrische Kapazität	Farad	F	$\mathrm{A\,s\,V^{-1}}$
magnetische Flussdichte	Tesla	T	$\mathrm{V\,s\,m^{-2}}$
Induktivität	Henry	H	$\mathrm{V\,s\,A^{-1}}$

Für abgeleitete Einheiten sind in der Praxis diverse Realisierungen üblich, z. B.: Referenzspannungen (Spannungsnormale) können über den **Wechselstrom-Josephson-Effekt** durch eine Frequenzmessung sehr genau festgelegt werden. Der entsprechende Zusammenhang ist durch die *Josephson-Konstante* definiert: $\mathrm{K_J} = 2\mathrm{e}/\mathrm{h} \approx 483\,597.848\,416\,984\,\mathrm{GHz/V}$. Die Widerstandseinheit Ohm (Ω) wird über den **quantisierten Hall-Effekt** definiert (*Von-Klitzing-Konstante*: $\mathrm{R_K} = \mathrm{h}/\mathrm{e}^2 \approx 25\,812.807\,459\,304\,5\,\Omega$).

[2] Aufgepasst: Von Personennamen abgeleitete Einheitenbezeichnungen sagen nichts aus über die Bedeutung der Grössen. Besser ist es sich die physikalischen Zusammenhänge für die Einheiten zu merken, z. B. „Joule pro Ampère-Sekunde“ für „Volt“ oder „Volt, pro Ampère pro Sekunde“ für „Henry“.

B. Linearität

B.1. Definition

Eine Abbildung $x \mapsto y = f(x)$ heisst (homogen-) **linear**, falls die beiden folgenden Bedingungen gelten:

$$\text{Homogenität:} \quad f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x) \quad \text{für jede beliebige Konstante } \alpha \tag{B.1}$$

$$\text{Additivität:} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{B.2}$$

Beispiele

1. **Proportionalität**

$$x \mapsto y = a\, x$$

Die Proportionalität erfüllt beide Bedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (a\, x) &= \alpha\, (a\, x) \\ a \cdot (x_1 + x_2) &= a\, x_1 + a\, x_2 \end{aligned}$$

2. **Affine Abbildung**

$$x \mapsto y = a\, x + b$$

Die Affinität erfüllt *keine* der beiden Bedingungen, wird aber dennoch als lineare Beziehung bezeichnet, allerdings als nicht-homogene:

$$\begin{aligned} a\, (\alpha\, x) + b = \alpha\, a\, x + b &\neq \alpha\, (a\, x + b) \\ a \cdot (x_1 + x_2) + b &\neq a\, x_1 + b + a\, x_2 + b \end{aligned}$$

3. **Ableitung**

$$y(x) \mapsto y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$$

Die Ableitung erfüllt beide Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\alpha\, y)}{\mathrm{d}x} &= \alpha\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}\big(y_1 + y_2\big)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

4. **Unbestimmtes Integral**

$$f(x) \mapsto F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{Stammfunktion: } F(x) \text{ mit } \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Die Integration erfüllt beide Bedingungen:

$$\begin{aligned} \int \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x &= \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ \int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

Die Eigenschaften Homogenität und Additivität können zu einer **Linearkombination** verschmolzen werden:

$$\mathrm{f}(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1\, \mathrm{f}(x_1) + \alpha_2\, \mathrm{f}(x_2)$$

Dieses Ergebnis ist das Merkmal der Linearität schlechthin.

B.2. Kennlinienlinearisierung

In manchen Fällen sind die Kennlinien der betrachteten Komponenten mehr oder weniger stark nichtlinear. Um dennoch die Vorteile der Linearität nutzen zu können, kann in einem beschränktem Wertebereich die nichtlineare Funktion durch eine Gerade approximiert werden. Diese so genannte Linearisierung basiert auf der Taylor-Reihenentwicklung der Funktion von der nur die Glieder bis zur ersten Ordnung betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
&\text{Abbildung:} && x \mapsto f(x) \\
&\text{Arbeitspunkt:} && x_0 \mapsto f(x_0) \\
&\text{n-te Ableitung:} && f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} \\
&\text{Taylor-Reihe:} && f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \ldots \\
& && \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \quad \text{wobei} \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \\
&\text{Linearisierung:} && f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Sinnvollerweise sollte die betrachtete Funktion im und um den Arbeitspunkt herum differentierbar sein. Die Linearisierung (B.3) liefert die Gleichung der Tangente an die Funktion $y = f(x)$ im „Arbeitspunkt“ $(x_0 \,|\, y_0)$ und dient üblicherweise zur Näherung des Funktionsverlaufs in der Umgebung dieses Punktes.

Beispiel: **Linearisierung einer Diodenkennlinie**

Diodenkennlinien haben einen nichtlinearen, exponentiellen Verlauf. Im Sperrbereich (für $U < 0$) können solche Kennlinien durch einen sehr grossen Widerstand ersetzt werden; Grössenordnung für Si-Dioden: $100\,\mathrm{M\Omega}$ bis $1\,\mathrm{G\Omega}$. Im Durchlassbereich kann eine Gerade als Modell angegeben werden. Letztere lässt sich durch eine lineare Quelle mit Ersatzleerlaufspannung U_e und Ersatzinnenwiderstand R_e dargestellen. Typische Parameterwerte für Si-Dioden sind: $U_e \approx 0.7\,\mathrm{V}$ und $R_e \approx 1\,\Omega$ (siehe Abb. B.1). Als weitere Vereinfachung ist auch eine ideale Spannungsquelle mit der eingeprägten Spannung $U_e = 0.7\,\mathrm{V}$ üblich.

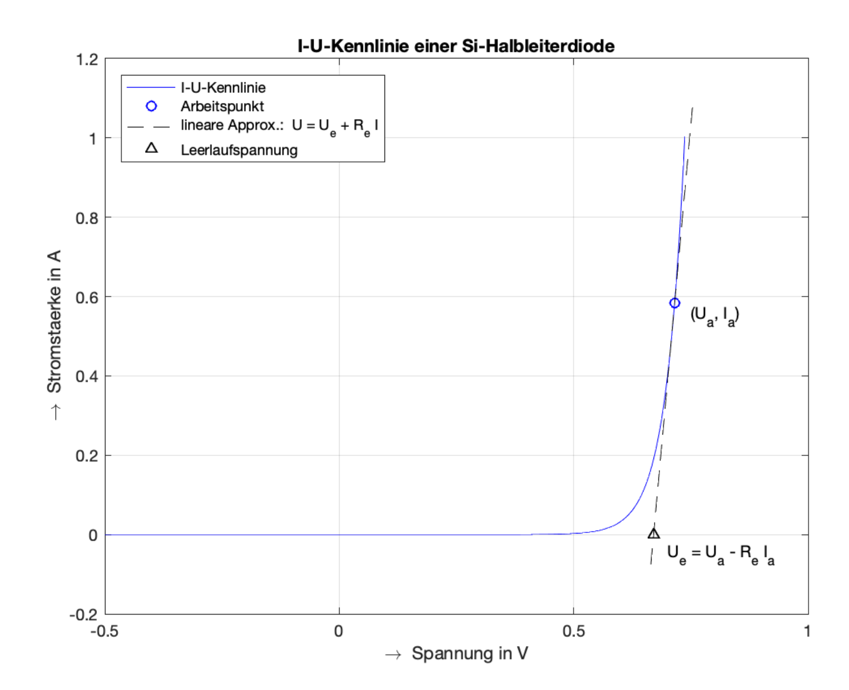


Abbildung B.1.: I-U-Kennline einer Si-Halbleiterdiode mit ihrer linearen Approximation im Durchlassbereich

□

C. Dualität

Mit Dualität wird eine mathematische Strukturverwandtschaft zwischen verschiedenen Grössen und ihren Beziehungen verstanden. Betrachtet man z. B. den § 2.2.2 „Lineare Quellen“, so fällt auf, dass alle Gleichungen für die lineare Stromquelle mathematisch die exakt gleiche Struktur haben wie die Gleichungen für die lineare Spannungsquelle. Dabei müssen lediglich Spannungen durch Ströme, Widerstandswerte durch Leitwerte und Umgekehrt ersetzt werden. Diese Verwandtschaft ermöglicht es die Beziehungen für ein Netzwerk durch Substitution (Austausch) in den entsprechenden Beziehungen des dualen Netzwerkes direkt zu erhalten.

In der folgenden Tabelle sind die zueinander duale Grössen dargestellt:

Tabelle C.1.: Dualität zwischen den elektrischen Grössen und deren Schaltungen

Elektrische Grössen		
Spannung	↔	Stromstärke
Widerstand	↔	Leitwert
Spezifischer Widerstand	↔	Leitfähigkeit
Induktivität	↔	Kapazität
Strukturelle Verwandtschaften		
Ideale Spannungsquelle	↔	Ideale Stromquelle
Leerlauf	↔	Kurzschluss
Serieschaltung	↔	Parallelschaltung
Sternschaltung	↔	Dreieckschaltung
Abgeleitete Substitutionspaare		
U-I-Charakteristik	↔	I-U-Charakteristik
Lineare Spannungsquelle	↔	Lineare Stromquelle
Spannungsquellenersatzschaltung (Thévenin)	↔	Stromquellenersatzschaltung (Norton)

Das Prinzip der Dualität soll hier an den folgenden Beispielen illustriert werden. Die beiden Schaltungen nach Abb. C.1 und C.2 sind dabei zueinander dual, wie aus dem Vergleich mit der Tabelle C.1 überprüft werden kann. Zum Unterstreichen der Dualität werden alle möglichen Maschen- und Knotengleichungen nach Kirchhoff aufgestellt. Dies führt zu mehr Gleichungen als für die Berechnung der Schaltungsgrössen benötigt werden, zu einem überbestimmten, redundanten Gleichungssystem. Dies sollte aber zu keinem Problem führen, da keine Widersprüche in den Gleichungen auftreten.

Beispiel: **Zweigstromanalyse**

In diesem Analyseverfahren werden die Stromstärken in den Zweigen der Schaltung als unbekannte Grössen betrachtet. Die unbekannten Spannungen werden aus den Stromstärken

in den Widerständen ausgedrückt. Die Kirchoff'schen Gleichungen nach der Schaltung aus Abb. C.1 ergeben:

Knotengleichungen:

$$\begin{aligned} I_0 - I_1 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_0 + I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} -R_2\, I_2 + R_3\, I_3 &= 0 \\ R_1\, I_1 + R_2\, I_2 &= U_0 \\ -R_1\, I_1 - R_2\, I_2 &= -U_0 \end{aligned}$$

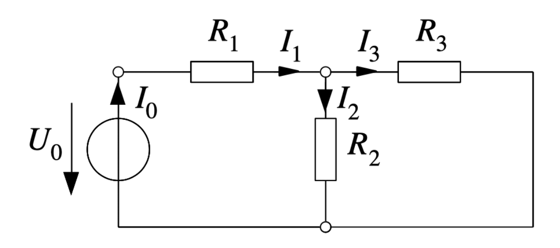


Abbildung C.1.: Schaltung mit Spannungsquelle und drei Widerständen

Das Gleichungssystem in Matrixform ausgedrückt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -R_2 & R_3 \\ 0 & R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 \\ -U_0 \end{bmatrix}$$

□

Beispiel: **Zweigspannungsanalyse**

In diesem Analyseverfahren werden die Spannungen über den Zweigen der Schaltung als unbekannte Grössen betrachtet. Die unbekannten Stromstärken werden aus den Spannungen mit den Leitwerten der Widerstände ausgedrückt. Die Kirchoff'schen Gleichungen nach der Schaltung aus Abb. C.2 ergeben:

Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} U_0 - U_1 &= 0 \\ U_1 - U_2 - U_3 &= 0 \\ -U_0 + U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned}$$

Knotengleichungen:

$$
\begin{aligned}
-G_2\,U_2 + G_3\,U_3 &= 0 \\
G_1\,U_1 + G_2\,U_2 &= I_0 \\
-G_1\,U_1 - G_2\,U_2 &= -I_0
\end{aligned}
$$

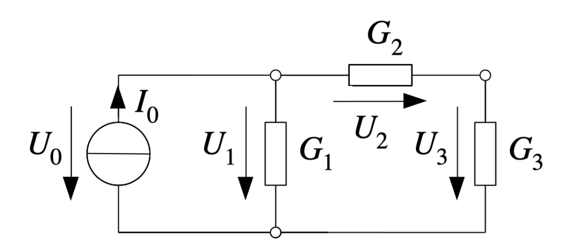


Abbildung C.2.: Schaltung mit Stromquelle und drei Widerständen
Die Widerstandswerte wurden hier über die Leitwerte festgelegt.

Das Gleichungssystem in Matrixform ausgedrückt:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -G_2 & G_3 \\
0 & G_1 & G_2 & 0 \\
0 & -G_1 & 0 & -G_3
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_0 \\ -I_0
\end{bmatrix}
$$

□

Wie aus den Beispielen ersichtlich ist, ist die Struktur der beiden Gleichungssysteme identisch. Um das hervorzuheben wurde die Reihenfolge der Gleichungen entsprechend angepasst.

Bemerkung: **Anzahl linear unabhängige Gleichungen**

Gemäss den Ausführungen zur Graphentheorie im § 4.3 gibt es hier $k - 1 = 2$ linear unabhängige Knoten- und $z - k + 1 = 2$ Maschengleichungen.

Der Rang der Matrizen aus den beiden Beispielen ist $(k - 1) + (z - k + 1) = z = 4$, wie durch Gauß-Elimination überprüft werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] Bureau International des Poids et Mesures: *The International System of Units (SI)* https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9-EN.pdf